MATEMATIČNE NAPAKE KOT PRILOŽNOST ZA UČENJE

Raziskava o dejavnosti »Matematični detektivi«

Raziskovalna naloga

Nataša Tanko Belaj prof. ma-fi

Ribnica, oktober 2026

KAZALO VSEBINE

1 UVOD 1

1.1 Opredelitev raziskovalnega področja 1

1.2 Aktualnost in pomen obravnavane teme 1

1.3 Matematične napake kot raziskovalni problem 2

1.4 Namen raziskovalne naloge 2

1.5 Cilji raziskovalne naloge 2

1.6 Raziskovalna vprašanja 2

1.7 Hipoteze 3

1.8 Omejitve raziskave 3

1.9 Raziskovalne metode 3

1.10 Izvirni prispevek k praksi in teoriji 4

2 TEORETIČNI DEL 4

2.1 Matematične napake kot del učnega procesa 4

2.2 Razlika med napako in zmoto 4

2.3 Analiza matematičnih napak 5

2.4 Diagnostični pomen matematičnih napak 5

2.5 Metakognicija pri učenju matematike 6

2.6 Preverjanje matematične rešitve 6

2.7 Učenje iz napak 7

2.8 Vloga razlage pri učenju 7

2.9 Formativno spremljanje 8

2.10 Vloga učitelja pri delu z napakami 8

2.11 Sodelovalno učenje in primerjanje rešitev 8

2.12 Dejavnost »Matematični detektivi« 9

2.13 Prednosti strukturiranega pristopa 9

2.14 Vključevanje dejavnosti v različne matematične vsebine 9

2.15 Razvoj matematičnega argumentiranja 9

2.16 Od napake k samostojnemu učenju 10

2.17 Teoretični model raziskave 10

2.18 Povzetek teoretičnih izhodišč 10

2.19 Ponazoritve analize napak pri različnih vsebinah 10

2.19.1 Vrstni red računskih operacij 10

2.19.2 Razširjanje oklepajev 12

2.19.3 Seštevanje ulomkov 13

2.19.4 Deljenje ulomkov 14

2.19.5 Negativna števila 16

2.19.6 Kvadrat vsote 17

2.19.7 Linearne enačbe 18

2.19.8 Neenačbe 19

2.19.9 Odstotki 21

2.19.10 Zaporedno spreminjanje cen 22

2.19.11 Razmerja 23

2.19.12 Ploščina pravokotnika 24

2.19.13 Pitagorov izrek 26

2.19.14 Povprečna vrednost 27

2.19.15 Verjetnost 28

2.19.16 Potence z isto osnovo 29

2.19.17 Koreni 30

2.19.18 Koordinatni sistem 32

2.20 Pregled dosedanjih raziskav 33

3 EMPIRIČNI DEL 34

3.1 Časovni potek raziskave 34

3.2 Postopek zbiranja podatkov 34

3.3 Raziskovalna metoda 34

3.4 Hipoteze 35

3.5 Raziskovalni vzorec 35

3.6 Izvedba dejavnosti »Matematični detektivi« 35

3.7 Kriteriji uspešnosti 35

3.8 Vprašalnik o doživljanju dejavnosti 36

3.9 Etični vidiki raziskave 36

3.10 Metodološke omejitve empiričnega dela 36

4 REZULTATI 37

4.1 Rezultati začetnega in končnega preverjanja 37

4.2 Rezultati glede na razred 41

4.3 Uspešnost pri posameznih kriterijih 41

4.4 Prepoznavanje matematične napake 41

4.5 Določanje mesta napake 41

4.6 Razlaga vzroka napake 42

4.7 Popravljanje matematične rešitve 42

4.8 Preverjanje rezultata 42

4.9 Rezultati vprašalnika 42

4.10 Kvalitativna analiza odgovorov učencev 43

5 RAZPRAVA 43

5.1 Odgovor na prvo raziskovalno vprašanje 43

5.2 Odgovor na drugo raziskovalno vprašanje 43

5.3 Odgovor na tretje raziskovalno vprašanje.....44

5.4 Primerjava rezultatov z izhodišči raziskave 44

5.5 Izvirni prispevek k praksi in teoriji 45

5.6 Predlog izboljšave raziskave 45

6 SKLEPNE UGOTOVITVE 47

VIRI IN LITERATURA 49

PRILOGA 1: REZULTATI UČENCEV..... 50

PRILOGA 2: PONAZORITEV IZVEDBE IN ODGOVORI UČENCEV 51

PRILOGA 3: NALOGE IN TOČKOVNIK 51

PRILOGA 4: VPRAŠALNIK O DEJAVNOSTI »MATEMATIČNI DETEKTIVI« 53

POVZETEK

Raziskava obravnava matematične napake kot priložnost za učenje. Njen namen je opisati dejavnost »Matematični detektivi« in spremembe v dosežkih pri analizi napak. V raziskavo je bilo vključenih 32 učencev 8. in 9. razreda; uporabljeni so bili začetno in končno preverjanje, vprašalnik ter analiza pisnih odgovorov. Povprečni dosežek v opisanem vzorcu se je povečal s 17,5 na 23,9 točke od 30. Izboljšanje je bilo ugotovljeno pri vseh petih kriterijih, največ pri preverjanju in razlagi vzroka napake. Pri vprašalniku so bila ohranjena tri povprečja: učenci so dejavnost ocenili kot miselno zahtevno, primerjanje rešitev kot koristno in dejavnost kot zanimivo. Naloga razčleni korake od prepoznavanja napake do preverjanja popravka in predstavi ponazoritve za pouk. Zaradi majhnega priložnostnega vzorca in odsotnosti kontrolne skupine ugotovitve ne dokazujejo vzročnega učinka dejavnosti.

Ključne besede: matematične napake, analiza napak, matematično mišljenje, metakognicija, formativno spremljanje

ABSTRACT

This study examines mathematical errors as opportunities for learning. It describes the “Mathematical Detectives” activity and reported changes in pupils’ ability to analyse errors. The study included 32 pupils in grades eight and nine, an initial and final assessment, a questionnaire, and analysis of written answers. The reported mean score rose from 17.5 to 23.9 out of 30. Improvement was reported for all five assessed criteria, especially checking results and explaining causes of errors. For the three questionnaire items with retained mean scores, pupils rated the activity as mentally demanding, comparison of solutions as helpful, and the activity as interesting. The study describes the stages from identifying an error to verifying a correction and provides illustrative classroom examples. Because the sample was small and non-random and no control group was used, the findings cannot establish a causal effect or be generalized to a wider population.

Keywords: mathematical errors, error analysis, mathematical thinking, metacognition, formative assessmen

1 UVOD

1.1 Opredelitev raziskovalnega področja

Razumevanje učenčevih napak je pomembno tudi z vidika učiteljevega načrtovanja nadaljnjega poučevanja. Napake in napačne predstave lahko predstavljajo pomemben vir informacij o učenčevem matematičnem mišljenju. Analiza napak tako učitelju omogoča vpogled v načine razmišljanja učencev, vendar je razumevanje vzroka napake zahtevnejše od samega prepoznavanja napačnega odgovora.

Na tem izhodišču je bila oblikovana dejavnost »Matematični detektivi«, pri kateri učenci nastopajo v vlogi raziskovalcev matematične rešitve. Njihova naloga ni samo rešiti matematični problem, temveč raziskati že zapisano rešitev, v kateri je napaka.

Matematika je predmet, pri katerem učenci pri reševanju nalog pogosto naredijo napake.

Napaka je lahko posledica nepoznavanja postopka, napačne razlage podatkov, nepazljivosti ali drugačnega načina razmišljanja. V šolski praksi je pogosto pomembno predvsem, ali je končni rezultat pravilen. Raziskava »Matematične napake kot priložnost za učenje« pa izhaja iz drugačnega pogleda: napačna rešitev lahko postane izhodišče za učenje, če jo učenec podrobno pregleda, poišče mesto napake, razloži njen vzrok, rešitev popravi in nato preveri.

V središču raziskave ni samo vprašanje, ali je končni odgovor pravilen. Pomemben je tudi postopek, ki je do njega pripeljal. Napačen zapis zato postane predmet opazovanja, razlage in preverjanja. Učenec se ne ustavi pri oznaki »narobe«, ampak mora ugotoviti, kaj se je zgodilo in kako bi bilo mogoče rešitev izboljšati.

1.2 Aktualnost in pomen obravnavane teme

Pri zahtevnejših matematičnih vsebinah je lahko končni odgovor napačen zaradi enega samega koraka, ki ni v skladu s pravilom. Učitelj iz končnega odgovora še ne vidi, ali učenec ne razume pojma, je nepravilno uporabil postopek ali je naredil računsko pomoto. Analiza zapisanih korakov zato omogoča natančnejši pogovor o razumevanju.

Dejavnost »Matematični detektivi« postavi učenca v vlogo presojevalca rešitve. Učenec mora napako opaziti, določiti prvi napačni korak, pojasniti vzrok, rešitev popraviti in preveriti. S tem se povezujejo matematično znanje, argumentiranje in spremljanje lastnega mišljenja. Vprašanje ni samo, kateri rezultat je pravilen, temveč zakaj je popravek utemeljen.

Višji dosežek po dejavnosti je pomemben rezultat, vendar sam še ne pove, zakaj je do spremembe prišlo. Na razliko med preverjanjema so lahko vplivali tudi vaja, učiteljeva pomoč

in poznavanje vrste nalog. Zato v nalogi opisujem spremembe pri sodelujočih učencih in jih razlagam ob upoštevanju teh omejitev.

1.3 Matematične napake kot raziskovalni problem

Raziskovalni problem izhaja iz razlike med tem, da učenec opazi napačen rezultat, in tem, da zna napako tudi analizirati. Učenec lahko ugotovi, da rešitev ni pravilna, vendar je zahtevnejše določiti prvi napačni korak, pojasniti uporabljeno pravilo, rešitev popraviti in popravek preveriti. Pri enačbi z oklepajem na primer ni dovolj povedati, da je rezultat napačen; učenec mora prepoznati, da je bilo število pred oklepajem pomnoženo samo s prvim členom. Raziskava zato preverja, kako uspešni so učenci pri posameznih stopnjah takšne analize in kako se njihovi dosežki razlikujejo med začetnim in končnim preverjanjem.

1.4 Namen raziskovalne naloge

Namen naloge je opisati, kako učenci ob strukturiranem delu analizirajo matematične napake, ter primerjati njihove dosežke pred dejavnostjo in po njej. Analiza je razdeljena na pet vidikov: prepoznavanje napake, določanje njenega mesta, razlago vzroka, popravljanje rešitve in preverjanje rezultata.

Naloga obravnava tudi učenčevo doživljanje dejavnosti. Didaktični primeri v teoretičnem delu ponazarjajo uporabo petih korakov pri različnih vsebinah; niso zapisi odgovorov sodelujočih učencev.

1.5 Cilji raziskovalne naloge

Cilji so: (1) opisati spremembo skupnega povprečnega dosežka med začetnim in končnim preverjanjem; (2) primerjati uspešnost pri petih kriterijih analize napake; (3) povzeti ocene dejavnosti v vprašalniku; (4) ugotovitve povezati z raziskavami o učenju iz napak in z omejitvami uporabljenega načrta.

1.6 Raziskovalna vprašanja

RV1: Kako se v opisanem vzorcu razlikujeta povprečna dosežka pri začetnem in končnem preverjanju?

RV2: Kako se med preverjanjema razlikujejo deleži uspešnosti pri prepoznavanju napake, določanju njenega mesta, razlagi vzroka, popravljanju rešitve in preverjanju rezultata?

RV3: Kako učenci na podlagi odgovorov v vprašalniku doživljajo dejavnost »Matematični detektivi«?

1.7 Hipoteze

H1: Povprečni dosežek pri končnem preverjanju bo v opisanem vzorcu višji kakor pri začetnem preverjanju.

H2: Delež uspešnih rešitev bo pri končnem preverjanju višji pri vsakem od petih spremljanih kriterijev.

H3: Povprečne ocene treh izbranih trditev, za katere so ohranjeni zbirni podatki, bodo višje od sredine petstopenjske lestvice.

Hipoteze se nanašajo na sodelujoči vzorec. Tudi če jih zbrani podatki podprejo, iz tega še ne moremo sklepati, da je spremembo povzročila samo dejavnost »Matematični detektivi«.

1.8 Omejitve raziskave

Raziskava vključuje majhen priložnostni vzorec 32 učencev. Kontrolna skupina ni bila vključena, zato rezultatov ni mogoče posplošiti na širšo populacijo ali ugotovljenih sprememb pripisati samo dejavnosti. Primerjava 8. in 9. razreda je opisna, saj skupini nista bili naključno oblikovani.

Raziskovalno delo je potekalo od aprila do junija 2026 ter septembra 2026, vendar natančni datumi posameznih izvedb in trajanje posameznih dejavnosti niso bili sistematično evidentirani. Prav tako niso vključeni vsi izvirni odgovori učencev, zakasnjeno preverjanje pa ni bilo izvedeno. Zato ni mogoče presoditi trajnosti sprememb, razpršenosti vseh posameznih dosežkov po kriterijih ali doslednosti ocenjevanja na podlagi izvirnih ocenjevalnih listov. Pri interpretaciji so uporabljeni podatki, predstavljeni v nalogi in prilogah.

1.9 Raziskovalne metode

Teoretični del temelji na opisnem pregledu strokovne literature. Empirični del opisno primerja začetno in končno preverjanje pri istem vzorcu; vprašalnik dopolnjuje številčne rezultate. V prilogi 1 so predstavljeni anonimizirani pari skupnih točk začetnega in končnega preverjanja. Priloga 2 vsebuje izbrane anonimizirane odgovore učencev, priloga 3 naloge in točkovnik, priloga 4 pa uporabljeni vprašalnik o dejavnosti »Matematični detektivi«. Ker vsi izvirni izdelki

in posamezni ocenjevalni listi niso vključeni v nalogo, ponovno neodvisno ocenjevanje vseh posameznih odgovorov ni mogoče.

1.10 Izvirni prispevek k praksi in teoriji

Osrednji praktični prispevek raziskave je dejavnost »Matematični detektivi«, ki analizo matematične napake pretvori v jasno strukturiran učni proces.

Dejavnost je mogoče uporabiti pri različnih matematičnih vsebinah, saj se lahko spreminjajo matematični primeri, vrsta napak in zahtevnost nalog.

2 TEORETIČNI DEL

2.1 Matematične napake kot del učnega procesa

Matematična napaka ni zgolj napačen končni odgovor. Učenčev zapis lahko pokaže, katero pravilo je uporabil, kako je razumel nalogo in kje se je njegov postopek prvič oddaljil od matematično utemeljenega sklepanja. Razlikovati je treba med računsko pomoto in ponavljajočo se napačno predstavo, saj zahtevata različni vrsti povratne informacije.

Pri dejavnosti »Matematični detektivi« napačna rešitev postane predmet preiskovanja. Učenec zaporedno presodi pravilnost, določi mesto napake, pojasni vzrok, izvede popravek in preveri rezultat. Če zna samo prepisati pravilen postopek, še ni razvidno, ali razume razlog za popravek. Zato ima v nalogi posebno mesto ubeseditev matematičnega pravila.

Hoth, Larrain in Kaiser (2022) razlikujejo med opazovanjem napake, njeno interpretacijo in odzivom učitelja. To razlikovanje podpira tudi petdelno vrednotenje učenčeve analize: prepoznavanje je začetni korak, razlaga in preverjanje pa zahtevata dodatno utemeljevanje.

2.2 Razlika med napako in zmoto

Pri matematiki je smiselno razlikovati med naključno računsko pomoto in napako, ki kaže na nerazumevanje pojma ali pravila. Pomota se lahko pojavi tudi takrat, ko učenec postopek sicer razume, medtem ko ponavljajoča se napaka pogosto opozarja na stabilnejšo napačno predstavo. Takšno razlikovanje je pomembno, ker učitelj glede na vzrok izbere drugačno povratno informacijo.

$27 + 18 = 35$

Učenec lahko sicer pravilno razume postopek seštevanja, vendar se pri računanju zmoti.

Če se enaka nepravilnost pojavlja pri več podobnih nalogah, je verjetneje, da ne gre le za nepazljivost. Učenčeva razlaga postopka zato pomaga ugotoviti, ali je težava v računanju, razumevanju matematičnega pojma ali uporabi pravila. Namen analize ni učenca označiti zaradi napake, temveč čim natančneje določiti, kaj mora pri nadaljnjem učenju razjasniti.

Razlikovanje med vrstami napak je pomembno tudi za učenca. Ko zna povedati, ali je napačen rezultat nastal zaradi nepazljivosti, napačno izbranega postopka ali nerazumevanja pravila, lažje izbere ustrezen način popravka. S tem napaka postane informacija o procesu reševanja in ne zgolj znak, da končni odgovor ni pravilen.

V dejavnosti »Matematični detektivi« se to razlikovanje uresničuje tako, da učenec ne navede samo pravilnega rezultata. Določiti mora mesto napake, pojasniti njen vzrok in utemeljiti popravek. Prav razlaga vzroka omogoča razlikovanje med površinsko računsko pomoto in napako, ki je povezana z razumevanjem matematičnega pravila.

2.3 Analiza matematičnih napak

Analiza matematične napake pomeni sistematičen pregled zapisanega postopka. Učenec najprej presodi, ali je rešitev pravilna, nato poišče prvi korak, pri katerem postopek ni več matematično utemeljen. Pomembno je, da ne išče le drugačnega rezultata, ampak ugotovi, katero pravilo ali povezava je bila uporabljena neustrezno. Tako analiza vključuje opazovanje, razlago in utemeljitev popravka.

2.4 Diagnostični pomen matematičnih napak

Diagnostična vrednost napake je v tem, da razkrije več kot končni rezultat. Iz zaporedja učenčevih korakov je mogoče sklepati, katera znanja uporablja pravilno in na katerem mestu potrebuje dodatno razlago ali vajo.

Hoth, Larrain in Kaiser (2022) poudarjajo, da je pri delu z napakami pomembno njihovo razumevanje in interpretiranje. Učitelj pri tem ne obravnava samo pravilnosti rezultata, temveč poskuša razumeti učenčevo razmišljanje.

Diagnostično delo pri matematiki temelji na pridobivanju informacij o učenčevem znanju in razumevanju. Napaka je pri tem lahko pomemben vir informacij.

Če učenec napiše samo napačen rezultat, je možnosti za interpretacijo manj. Če pa zapiše celoten postopek, lahko učitelj ali učenec opazi, v katerem koraku se je razmišljanje oddaljilo od pravilnega postopka.

Za učenca pa ima lahko diagnostični proces še eno pomembno funkcijo: omogoča mu vpogled v lastno razmišljanje.

Zato je pri diagnostičnem delu pomembno ohraniti učenčev postopek in ga obravnavati korak za korakom. Učitelj lahko z vprašanji preveri, zakaj je učenec izbral določeno operacijo ali pravilo, učenec pa dobi možnost, da svojo odločitev pojasni. Tak pristop daje natančnejšo informacijo kot zgolj označitev odgovora kot pravilnega ali napačnega.

2.5 Metakognicija pri učenju matematike

Metakognicija se nanaša na posameznikovo zavedanje in uravnavanje lastnega mišljenja. Pri matematiki vključuje tudi sposobnost načrtovanja reševanja, spremljanja postopka in preverjanja doseženega rezultata.

Pri analizi napak se metakognicija kaže predvsem v tem, da učenec spremlja lastno razmišljanje. Vpraša se, kaj je želel doseči z določenim korakom, ali je uporabljeno pravilo primerno in kako lahko preveri rezultat. Takšna vprašanja ga usmerjajo od avtomatičnega izvajanja postopkov k zavestnemu nadzoru reševanja.

2.6 Preverjanje matematične rešitve

Preverjanje rezultata je pomemben del matematičnega reševanja, vendar ga učenci ne izvajajo vedno dosledno.

Pri preverjanju lahko učenec uporabi različne načine: - ponovi račun; - uporabi obratno operacijo; - vstavi rezultat nazaj v začetno enačbo; - oceni približno vrednost rezultata; - preveri smiselnost odgovora glede na besedilo naloge; - uporabi drug način reševanja.

$3 \cdot 4 + 2 = 14$

Preverjanje ni le ponovitev istega računa, temveč poskus potrditve rešitve z dodatnim razlogom. Pri enačbi lahko učenec dobljeno vrednost vstavi v začetni zapis, pri računski nalogi uporabi obratno operacijo, pri besedilnem problemu pa presodi, ali je rezultat glede na podatke sploh smiseln. Izbrani način preverjanja mora biti povezan z vrsto naloge.

V dejavnosti »Matematični detektivi« je preverjanje zadnji samostojni korak analize. Učenec mora po popravku pokazati, zakaj novi rezultat sprejema kot pravilen. S tem se zmanjšuje možnost, da bi popravek nastal samo s poskušanjem ali posnemanjem ponujenega postopka.

Takšno preverjanje je pomembno tudi zato, ker pravilno izveden popravek še ne zagotavlja, da učenec razume celoten postopek. Če zna rezultat potrditi na drug način, pokaže povezovanje matematičnih pravil in večjo zanesljivost pri presoji lastne rešitve.

Primer: pri izrazu $3 \cdot 4 + 2$ učenec najprej upošteva množenje in dobi 14. Rezultat lahko dodatno preveri tako, da primerja prvotni izraz z izrazom $3 \cdot (4 + 2)$, ki ima zaradi oklepaja drugačen pomen in drugačen rezultat.

Preverjanje tako dopolnjuje prepoznavanje in popravljanje napake. Njegov namen ni ustvariti še enega enakega računa, ampak pridobiti dodaten dokaz, da je popravljena rešitev matematično smiselna.

2.7 Učenje iz napak

Učenje iz napak predpostavlja, da napaka sama po sebi še ne pomeni učenja. Do učenja lahko pride, ko učenec napako prepozna, razume njen vzrok in na podlagi tega spremeni svoje nadaljnje ravnanje.

Metcalfe (2017) poudarja, da so napake lahko pomemben del učnega procesa, vendar njihov učinek ni samoumeven. Pomembno je, kaj učenec naredi z informacijo o napaki.

Pomemben pogoj za učenje iz napak je kakovostna povratna informacija. Učenec mora dobiti dovolj informacij, da lahko ugotovi, kateri del njegovega razmišljanja je bil ustrezen in kateri zahteva spremembo. Če prejme samo pravilen odgovor, lahko napako odpravi brez razumevanja njenega vzroka; če vzrok razloži, pa lahko novo spoznanje prenese tudi na sorodne naloge.

Zato je pri učenju iz napak koristno povezati tri dejavnosti: prepoznavanje nepravilnosti, pojasnjevanje razloga in preverjanje popravka. Takšno zaporedje učenca spodbuja, da napake ne obravnava kot konec reševanja, temveč kot izhodišče za ponovni premislek o uporabljenem postopku.

2.8 Vloga razlage pri učenju

Napaka je nastala pri odstranjevanju oklepaja, ker mora število 2 pomnožiti oba člena v oklepaju.

Takšna razlaga pokaže več kot samo popravljeno enačbo. Razvidno je, ali učenec razume pravilo in zna povezati pravilo s konkretnim primerom.

Razlaga je zato pomemben kriterij pri vrednotenju kakovosti analize napake.

Za učitelja je tak pristop uporaben predvsem kot način pridobivanja informacij o učenčevem razmišljanju. Napaka lahko pokaže, kje se je učenec oddaljil od pravilnega postopka. Hkrati sama napačna rešitev še ne pove nujno vzroka; ta postane jasnejši šele skozi vprašanja, razlago in primerjanje korakov.

2.9 Formativno spremljanje

Formativno spremljanje je usmerjeno v pridobivanje informacij, ki pomagajo izboljševati proces učenja in poučevanja.

Formativna povratna informacija je učinkovitejša, kadar učencu pove, kaj je že opravil ustrezno in kaj mora še izboljšati. Pri analizi napak je mogoče ločeno spremljati prepoznavanje napake, določanje njenega mesta, razlago vzroka, popravljanje in preverjanje. Tako učenec dobi natančnejšo usmeritev za naslednji poskus kot pri splošni oznaki »pravilno« ali »napačno«.

2.10 Vloga učitelja pri delu z napakami

Učitelj ima pri delu z napakami pomembno vlogo. Njegova naloga ni samo označiti rešitve kot pravilne ali napačne, temveč lahko učenca spodbuja k nadaljnjemu razmišljanju.

Namesto neposrednega popravka lahko uporabi vprašanja: - Kje se je začela napaka? - Kaj si želel narediti v tem koraku? - Katero pravilo si uporabil? - Ali velja to pravilo tudi v tem primeru? - Kako lahko preveriš svoj rezultat?

Učiteljeva vprašanja naj učenca vodijo k samostojni razlagi, ne pa mu takoj razkriti rešitve. Pomembno je, da učitelj prilagodi pomoč ugotovljenemu vzroku napake: računska pomota zahteva drugačen odziv kot napačno razumljeno pravilo. S tem postane napaka izhodišče za ciljno usmerjeno povratno informacijo in nadaljnje učenje.

2.11 Sodelovalno učenje in primerjanje rešitev

Pri sodelovanju morajo učenci svoje ugotovitve tudi pojasniti drugim. S tem dobijo priložnost za argumentiranje in preverjanje lastnega razumevanja.

Pomembno pa je, da sodelovanje ne pomeni samo primerjanja končnih odgovorov. Namen je predvsem primerjati postopke in razloge za posamezne odločitve.

2.12 Dejavnost »Matematični detektivi«

Dejavnost »Matematični detektivi« je bila oblikovana kot strukturirana dejavnost za analizo napačnih matematičnih rešitev.

Učenec prejme rešitev z namerno vključeno matematično napako in jo obravnava po petih korakih: (1) prepozna, ali je rešitev napačna, (2) določi mesto napake, (3) pojasni njen vzrok, (4) napačni del popravi ter (5) preveri popravljeno rešitev. Pri razlagi mora s svojimi besedami utemeljiti, kaj je bilo napačno in katero matematično pravilo podpira popravek.

2.13 Prednosti strukturiranega pristopa

Strukturiranje dejavnosti v več korakov ima več možnih prednosti. Učencu omogoča, da se pri analizi napake ne osredotoči samo na končni rezultat.

2.14 Vključevanje dejavnosti v različne matematične vsebine

Dejavnost je mogoče prilagoditi različnim matematičnim vsebinam, ker pet korakov analize ni vezanih na eno vrsto naloge. Spreminjajo se lahko računske operacije, enačbe, ulomki, geometrija ali problemske naloge, medtem ko ostaja osnovno vprašanje enako: kje se je postopek oddaljil od pravilnega sklepanja in kako to utemeljiti.

2.15 Razvoj matematičnega argumentiranja

Ko učenec razlaga, zakaj je določena rešitev napačna, mora svoje trditve podpreti z matematičnim razlogom.

Matematično argumentiranje se razvija, ko učenec svoje presoje ne utemelji samo z izjavo, da je nekaj napačno, ampak navede razlog. Pri tem poveže konkreten korak s pravilom, lastnostjo ali odnosom med količinami. Razlaga je zato pomembna tudi takrat, ko učenec že zna zapisati pravilen popravek, saj pokaže globino njegovega razumevanja.

2.16 Od napake k samostojnemu učenju

Učenec, ki se navadi vprašati: »Ali je moj rezultat smiseln?« ali »Kako lahko preverim, da sem postopek izvedel pravilno?« postaja bolj samostojen pri učenju.

V tem smislu lahko analiza napak predstavlja povezavo med preverjanjem znanja in razvojem učnih strategij.

Samostojnost se krepi, ko učenec postopoma ponotranji vprašanja, ki jih sprva zastavlja učitelj: Kaj preverjam? Kje se je postopek spremenil? Katero pravilo velja? Kako lahko rezultat potrdim? Takšen način razmišljanja lahko uporablja tudi pri lastnih rešitvah, ne samo pri vnaprej pripravljenih napačnih primerih.

2.17 Teoretični model raziskave

Teoretični model raziskave povezuje pet zaporednih korakov: prepoznavanje napake, določanje njenega mesta, razlago vzroka, popravljanje rešitve in preverjanje rezultata. Koraki niso razumljeni kot povsem ločene sposobnosti, temveč kot povezani deli analize. Učenec lahko na primer napako pravilno opazi, vendar brez razlage vzroka še ni mogoče zanesljivo presoditi, ali razume, zakaj je določen korak neustrezen.

2.18 Povzetek teoretičnih izhodišč

Teoretični pregled kaže, da imajo matematične napake lahko pomembno diagnostično in učno vrednost. Za učenje ni pomemben samo končni rezultat, temveč tudi način, kako učenec razmišlja, katero pravilo uporablja in kako preverja svojo rešitev.

Skupno izhodišče obravnavanih pristopov je, da napačna rešitev vsebuje informacije o učenčevem razmišljanju. Metakognitivna vprašanja, razlaga, formativna povratna informacija, sodelovalno primerjanje rešitev in preverjanje rezultata imajo skupen cilj: učenca usmeriti k razumevanju postopka. Dejavnost »Matematični detektivi« ta izhodišča poveže v strukturiran model, ki je nato uporabljen v empiričnem delu raziskave.

2.19 Ponazoritve analize napak pri različnih vsebinah

2.19.1 Vrstni red računskih operacij

Ponazoritev napačnega zapisa: $3 \cdot 4 + 2 = 18$. Matematično utemeljen popravek: $(3 \cdot 4) + 2 = 14$. Najprej opravimo množenje, nato seštevanje. Če učenec najprej sešteje 4 in 2, se spremeni

pomen prvotnega izraza. Ta primer je didaktična ponazoritev in ni podatek o odgovorih sodelujočih učencev.

Pri tej vsebini se hitro pokaže, ali učenec matematični zapis bere kot zaporedje pravil ali predvsem kot niz števil in znakov. Koristno je, da najprej brez računanja pove, katera operacija ima prednost in kaj bi se spremenilo, če bi v izraz dodali oklepaj. Nato lahko primerja izraza $3 \cdot 4 + 2$ in $3 \cdot (4 + 2)$. Čeprav vsebujeta ista števila in isti operaciji, ne pomenita istega postopka. Prav ta primer omogoča pogovor o tem, da matematični zapis ni poljuben in da že majhna sprememba zapisa spremeni pomen naloge. Pri analizi napake lahko učenec tudi označi, kateri del rešitve je še pravilen in kje se pojavi prvi neupravičen korak. Tak način dela je uporaben zato, ker ga usmerja v branje celotnega postopka. Ne išče samo pravilnega rezultata, ampak mora pojasniti, zakaj je določena pot pravilna. Podoben način razmišljanja se pozneje pojavi tudi pri enačbah, ulomkih in potencah, kjer vrstni red oziroma pomen zapisa prav tako vpliva na rešitev.

Pri vsebini vrstnega reda računskih operacij je koristno najprej določiti, kateri korak zahteva preverjanje. Učenec naj primerja zapisani postopek z izhodiščno nalogo in poišče mesto, kjer se pomen ali uporabljeno pravilo spremeni. Šele nato naj oblikuje popravek. Če dobi pravilen rezultat prehitro, še ni nujno, da je razumel vzrok napake.

Pri vrstnem redu računskih operacij napačen zapis sam še ne pokaže, ali je vzrok nepazljivost ali nerazumevanje pravila. Zato je koristno, da učenec pojasni, kako je razmišljal. Njegova razlaga pokaže več kot samo končni popravek.

Popravek pri vrstnem redu računskih operacij naj učenec najprej oblikuje sam in ga šele nato primerja s prvotnim zapisom. Pri primerjavi označi zadnji pravilen in prvi napačen korak ter zapiše razlog za spremembo.

Zadnji korak pri vrstnem redu računskih operacij je smiselno nameniti neodvisnemu preverjanju popravka. Način preverjanja je odvisen od naloge: lahko uporabi obratno operacijo, vstavljanje, drug postopek ali presojo smiselnosti rezultata. S tem pokaže, da rezultata ni sprejel brez dodatnega premisleka.

Pri tem primeru je dobro primerjati $3 \cdot 4 + 2$ z izrazom $3 \cdot (4 + 2)$. Prvi je enak 14, drugi 18. Razlika ni posledica površne računske napake, ampak oklepajev, ki določajo vrstni red računanja. Učenec naj pove, kateri izraz ustreza dani nalogi.

Formativna povratna informacija naj pove, kateri korak je učenec že uspešno opravil. Ločeno lahko oceni prepoznavanje nepravilnosti, natančnost določanja mesta napake, matematično razlago, izvedbo popravka in preverjanje. Učenec, ki zna postopek pravilno popraviti, vendar vzroka ne zna povedati, potrebuje drugačno nadaljnjo nalogo kot učenec, ki pravilo razume, a

naredi računsko pomoto. Petstopenjski model pomaga, da ti dve situaciji ne dobita enakega splošnega odziva »narobe«.

Za utrjevanje vrstnega reda računskih operacij lahko učitelj spremeni en podatek in preveri, ali učenec pravilo prenese na soroden primer. Pri tem naj učenec pojasni, kaj je v novem primeru ostalo enako in kaj se je spremenilo.

Pri vrednotenju primera iz vrstnega reda računskih operacij končni odgovor ni dovolj; pomembno je spremljati vseh pet korakov analize. Ločeno lahko spremljamo, ali je učenec napako opazil, določil njeno mesto, razložil vzrok, izvedel popravek in ga preveril. Tako je tudi povratna informacija natančnejša.

Zaključna razprava o vrstnem redu računskih operacij lahko primerja različne utemeljitve in načine preverjanja. Do pravilnega sklepa lahko pridejo na več načinov, vendar mora biti iz njihove utemeljitve jasno, zakaj popravek velja. Tako se analiza napak poveže tudi z matematičnim sporazumevanjem.

2.19.2 Razširjanje oklepajev

Ponazoritev napačnega zapisa: $2(x + 3) = 14$; $2x + 3 = 14$. Matematično utemeljen popravek: $2x + 6 = 14$; $x = 4$. Faktor pred oklepajem pomnoži vsak člen v oklepaju. Vstavitev $x = 4$ v začetno enačbo da $2(4 + 3) = 14$. Ta primer je didaktična ponazoritev in ni podatek o odgovorih sodelujočih učencev.

Pri razširjanju oklepajev je posebej pomembno, da učenec razume vlogo faktorja pred oklepajem. Zapis $2(x + 3)$ lahko najprej razloži z besedami: dvakrat vzamemo celotno vsoto $x + 3$. Iz tega postane bolj razumljivo, zakaj se faktor 2 nanaša na oba člena. Uporaben je tudi preprost številski preizkus. Če namesto x izberemo 1, dobimo $2(1 + 3) = 8$, medtem ko je $2 \cdot 1 + 3 = 5$. Razlika je dovolj očitna, da učenec lahko sam presodi, da zapisa nista enakovredna. Pri dejavnosti je zato smiselno povezati simbolni zapis, besedno razlago in preverjanje s konkretnim številom. Če učenec zna napako samo popraviti, še ne vemo, ali razume distributivnost. Če pa zna pojasniti, zakaj mora faktor pomnožiti vsak člen v oklepaju, in to potrditi s preizkusom, je njegova razlaga precej bolj utemeljena. Takšna analiza pomaga tudi pri poznejšem delu z zahtevnejšimi algebrajskimi izrazi.

Analiza razširjanja oklepajev se začne z določitvijo prvega spornega koraka, ne z ugibanjem novega rezultata. Pomembneje od iskanja novega rezultata je, da učenec opazi prvi sporni korak in zna povedati, kaj se je v njem spremenilo. Tako popravek ni le ugibanje, ampak temelji na razumevanju.

Pri razširjanju oklepajev je iz samega rezultata težko presoditi, ali gre za računsko nepazljivost ali za napačno predstavo. To se lažje presodi iz učenčeve razlage kot iz samega rezultata. Učitelj lahko zato vpraša, zakaj je učenec izbral prav ta korak.

Popravek pri razširjanju oklepajev je najbolj informativen, kadar učenec pokaže mesto spremembe in navede uporabljeno pravilo. Pomembno je, da ne zapiše le pravilne različice, ampak tudi pojasni, zakaj je bil prvotni korak neustrezen.

Popravljeni rezultat pri razširjanju oklepajev je treba še preizkusiti z ustreznim neodvisnim načinom. Učenec naj izbere način, ki ustreza vrsti naloge, in pove, zakaj ga rezultat prepriča. Preverjanje zato ni samo ponovitev istega računa.

Pri enačbi $2(x + 3) = 14$ je ključen prehod na $2x + 6 = 14$. Preizkus $x = 4$ v začetni enačbi potrdi rezultat. Če učenec zapiše $2x + 3$, naj ob konkretnem primeru $x = 1$ preveri, ali sta $2(1 + 3)$ in $2 \cdot 1 + 3$ res enaka.

Za prenos znanja pri razširjanju oklepajev je uporaben nov primer z manjšo spremembo, ki zahteva ponovno utemeljitev. Učenec nato presodi, ali prvotni način popravka še velja, in svojo odločitev utemelji.

Pri razširjanju oklepajev petdelno vrednotenje pokaže, na kateri stopnji učenec potrebuje dodatno podporo. Pet korakov analize pokaže, kateri del učenec že obvlada in pri katerem še potrebuje pomoč.

Ob koncu obravnave razširjanja oklepajev naj učenci primerjajo razlage in pojasnijo, zakaj posamezen popravek velja. Pomembno je, da učenci svoje rešitve utemeljijo in ne iščejo samo stavka, ki ga želi slišati učitelj.

2.19.3 Seštevanje ulomkov

Ponazoritev napačnega zapisa: $1/2 + 1/3 = 2/5$. Matematično utemeljen popravek: $1/2 + 1/3 = 3/6 + 2/6 = 5/6$. Števcev in imenovalcev pri seštevanju ne seštevamo ločeno; ulomka najprej izrazimo z istim imenovalcem. Ta primer je didaktična ponazoritev in ni podatek o odgovorih sodelujočih učencev.

Pri seštevanju ulomkov je koristno, da učenec poleg postopka razume tudi pomen imenovalca. Napačen zapis $1/2 + 1/3 = 2/5$ je na prvi pogled lahko videti urejen, ker sta bila sešteta oba števca in oba imenovalca. Težava postane jasnejša, če ulomka ponazorimo kot dele iste celote. Polovica in tretjina nista enako velika dela, zato ju ne moremo neposredno združiti tako, da bi sešteli imenovalca. Ko oba ulomka zapišemo s šestinami, primerjava postane preglednejša: $1/2$ je $3/6$, $1/3$ pa $2/6$. Učenec lahko nato razloži, zakaj se pri vsoti seštejeta števca, imenovalec

pa ostane 6. Pomembno je, da se skupnega imenovalca ne nauči samo kot mehanskega koraka, ampak ga poveže z enako velikimi deli celote. Pri preverjanju lahko rezultat 5/6 primerja tudi z oceno: vsota polovice in tretjine mora biti večja od polovice in manjša od ene celote, kar 5/6 izpolnjuje, 2/5 pa ne.

V primeru seštevanja ulomkov naj učenec najprej določi, kje ponujeni postopek preneha biti matematično utemeljen. Poišče prvi korak, ki ni več matematično utemeljen, ter pojasni, zakaj. Na ta način se pozornost preusmeri s samega rezultata na postopek.

Pri seštevanju ulomkov sam zapis ne razkrije vedno vzroka napake, zato je pomembno vprašati po učenčevem razmišljanju. Sam zapis tega pogosto ne razkrije, zato učenčeva razlaga pomaga ugotoviti, kaj je treba še utrditi.

Primerjava obeh poti pri seštevanju ulomkov pomaga, da popravek ne ostane zgolj mehanska zamenjava rezultata. Tako lažje opazi, kje sta se postopka razšla, in svoj popravek tudi utemelji.

Popravek pri seštevanju ulomkov naj učenec potrdi z ustreznim preizkusom, oceno ali drugo potjo reševanja. Učenec lahko uporabi drugo pot reševanja, obratno operacijo, vstavljanje ali oceno. Cilj je dobiti dodaten razlog, da je popravek pravilen.

Pri ulomkih 1/2 in 1/3 lahko učenec uporabi šest enakih delov celote. Ena polovica je 3/6, ena tretjina 2/6, zato je vsota 5/6. Risba pokaže, zakaj se imenovalca ne seštejeta: velikost dela mora biti za oba ulomka enaka.

Razumevanje seštevanje ulomkov lahko utrdimo z različico naloge, ki ni povsem enaka prvotnemu primeru. Če učenec zna pojasniti, ali se isto pravilo še uporablja, je manj verjetno, da je popravek samo mehansko ponovil.

Vrednotenje primera iz seštevanja ulomkov je preglednejše, če posebej ocenimo vseh pet korakov dejavnosti. Učenec, ki pravilno popravi račun, vendar ne zna razložiti vzroka, namreč potrebuje drugačno povratno informacijo kot učenec, ki razume pravilo, a se računsko zmoti.

Ob skupnem pregledu seštevanje ulomkov naj učenci primerjajo predvsem razloge za popravek, ne le končnih odgovorov. Različni načini preverjanja so sprejemljivi, če res podpirajo sklep in so matematično smiselni.

2.19.4 Deljenje ulomkov

Ponazoritev napačnega zapisa: 2/3 : 4/5 = 8/15. Matematično utemeljen popravek: 2/3 : 4/5 = 2/3 · 5/4 = 5/6. Pri deljenju pomnožimo z obratno vrednostjo drugega ulomka. Rezultat

preverimo z množenjem $5/6 \cdot 4/5 = 2/3$. Ta primer je didaktična ponazoritev in ni podatek o odgovorih sodelujočih učencev.

Deljenje ulomkov je vsebina, pri kateri učenci pogosto poznajo pravilo, težje pa razložijo njegov pomen. Zato je pri napaki smiselno preveriti, ali učenec ve, kateremu ulomku poiščemo obratno vrednost in zakaj. Pri zapisu $2/3 : 4/5$ lahko rezultat $5/6$ preveri z obratno operacijo: če je količnik res $5/6$, mora veljati $5/6 \cdot 4/5 = 2/3$. Takšno preverjanje neposredno poveže deljenje in množenje ter je bolj informativno kot ponovno izvajanje istega postopka. Učitelj lahko doda tudi vprašanje, kaj bi se zgodilo, če bi učenec obrnil prvi ulomek ali oba ulomka. S primerjavo rezultatov se pokaže, da pravila ni mogoče poljubno spreminjati. Pomemben del razlage je zato stavek, da deljenje z ulomkom nadomestimo z množenjem z njegovo obratno vrednostjo. Če učenec zna ta korak povezati z obratno operacijo in preverjanjem, je manj verjetno, da bo pravilo uporabljal zgolj po spominu brez razumevanja.

Pri deljenju ulomkov je izhodišče natančen pregled zapisanih korakov in določitev prve nepravilnosti. Učenec naj določi, do kod je rešitev še pravilna in kje se pojavi prva nepravilnost. Šele po tej razlagi je smiselno zapisati popravljeno rešitev.

Pri deljenju ulomkov napačen rezultat sam še ne pojasni vzroka, zato je pomembna učenčeva razlaga postopka. Učenec naj zato poleg popravka opiše tudi svoje razmišljanje; tako je lažje ugotoviti, ali je šlo za pomoto ali za napačno uporabljeno pravilo.

Pri deljenju ulomkov naj popravek ne bo le prepis pravilne rešitve, temveč naj pokaže tudi razlog za spremembo. Bolj uporabno je, da pokaže mesto spremembe in na kratko razloži pravilo, zaradi katerega je popravek potreben.

Ko učenec pri deljenju ulomkov rešitev popravi, jo še preveri z načinom, ki dopolni prvotni postopek. Dobro preverjanje mora biti povezano z nalogo in naj pokaže nekaj več kot zgolj ponovno izvedbo istega postopka.

Deljenje $2/3 : 4/5$ lahko preverimo z obratno operacijo: $5/6 \cdot 4/5 = 2/3$. Učenec naj razloži, zakaj se obrne drugi ulomek in ne prvi. To prepreči pomnjenje pravila brez razumevanja povezave med deljenjem in množenjem.

Za dodatno vajo pri deljenju ulomkov je primeren soroden primer z eno premišljeno spremembo. Učenec naj napove, kako ta sprememba vpliva na postopek, in razloži svojo odločitev.

Primer iz deljenja ulomkov je mogoče ovrednotiti po posameznih korakih analize in tako natančneje opisati razumevanje. S tem dobimo jasnejšo sliko učenčevega razumevanja, kot če upoštevamo samo pravilnost končnega rezultata.

Pri deljenju ulomkov naj bo ob koncu v ospredju utemeljitev, ne le pravilno zapisan rezultat. Primerjava argumentov pokaže, kako učenci razumejo postopek in kje bi bilo potrebno dodatno pojasnilo.

2.19.5 Negativna števila

Ponazoritev napačnega zapisa: −3 − (−5) = −8. Matematično utemeljen popravek: −3 − (−5) = −3 + 5 = 2. Odštevanje negativnega števila je enako prištevanju njegove nasprotne vrednosti. Ta primer je didaktična ponazoritev in ni podatek o odgovorih sodelujočih učencev.

Pri negativnih številih se lahko napaka pojavi že pri razumevanju dveh zaporednih znakov. Izraz −3 − (−5) zato ni samo računska naloga, ampak tudi preizkus razumevanja odštevanja negativnega števila. Učenec lahko postopek pojasni na dva načina. Prvi je simbolni: odštevanje negativnega števila nadomestimo s prištevanjem nasprotne vrednosti, zato dobimo −3 + 5 = 2. Drugi način je številska premica, na kateri se od −3 pri odštevanju −5 premaknemo v desno. Če učenec dobi −8, lahko primerja izraza −3 − 5 in −3 − (−5) ter ugotovi, da oklepaj in predznak drugega števila bistveno spremenita pomen. Takšna primerjava je uporabna, ker učencu omogoči, da napako opiše z lastnimi besedami. Namesto splošnega pravila »minus in minus je plus« mora povedati, kaj se v konkretnem izrazu dejansko odšteva. S tem se zmanjša možnost, da bi isto pravilo nepravilno uporabil v drugačnih zapisih.

Analizo pri vsebini negativnih števil začnemo z iskanjem prvega mesta, kjer zapis ni več utemeljen. Učenec naj primerja zapisani postopek z izhodiščno nalogo in poišče mesto, kjer se pomen ali uporabljeno pravilo spremeni. Šele nato naj oblikuje popravek. Če dobi pravilen rezultat prehitro, še ni nujno, da je razumel vzrok napake.

Iz končnega zapisa pri negativnih številih ni mogoče zanesljivo razločiti pomote od napačno razumljenega postopka. Zato je koristno, da učenec pojasni, kako je razmišljal. Njegova razlaga pokaže več kot samo končni popravek.

Pri popravljanju primera z negativnimi števili je smiselno jasno označiti, kje se pravilna pot loči od napačne. Pri primerjavi označi zadnji pravilen in prvi napačen korak ter zapiše razlog za spremembo.

Pri negativnih številih je pomembno, da učenec pravilnega rezultata ne sprejme brez dodatnega preizkusa. Način preverjanja je odvisen od naloge: lahko uporabi obratno operacijo, vstavljanje, drug postopek ali presojo smiselnosti rezultata. S tem pokaže, da rezultata ni sprejel brez dodatnega premisleka.

Na številski premici se od −3 pri odštevanju −5 premaknemo za pet mest v desno in prispemo do 2. Če učenec dobi −8, naj primerja −3 − 5 in −3 − (−5); razlika med njima je predznak odštevanega števila.

Naslednja naloga pri negativnih številih naj vsebuje manjšo spremembo, ob kateri mora učenec pojasniti, kaj ostane enako. Pri tem naj učenec pojasni, kaj je v novem primeru ostalo enako in kaj se je spremenilo.

Ocena razumevanja pri negativnih številih je natančnejša, če ločeno pogledamo prepoznavanje, mesto napake, razlago, popravek in preverjanje. Ločeno lahko spremljamo, ali je učenec napako opazil, določil njeno mesto, razložil vzrok, izvedel popravek in ga preveril. Tako je tudi povratna informacija natančnejša.

Ob koncu primera z negativnimi števili je smiselno primerjati argumente učencev, ne le njihovih rezultatov. Do pravilnega sklepa lahko pridejo na več načinov, vendar mora biti iz njihove utemeljitve jasno, zakaj popravek velja. Tako se analiza napak poveže tudi z matematičnim sporazumevanjem.

2.19.6 Kvadrat vsote

Ponazoritev napačnega zapisa: $(a + b)^2 = a^2 + b^2$. Matematično utemeljen popravek: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Z množenjem $(a + b)(a + b)$ opazimo oba mešana člena. Primer $a = b = 1$ pokaže razliko med 4 in 2. Ta primer je didaktična ponazoritev in ni podatek o odgovorih sodelujočih učencev.

Pri kvadratu vsote je pogosta težava v tem, da učenec potenciranje razdeli na posamezna člena in izpusti srednji člen. Zapis $(a + b)^2$ je zato koristno najprej preoblikovati v produkt $(a + b)(a + b)$. Ko učenec oba oklepaja zmnoži, dobi $a^2 + ab + ab + b^2$ oziroma $a^2 + 2ab + b^2$. Tako srednji člen ne nastane kot dodatno pravilo, ki si ga je treba zapomniti, ampak kot posledica množenja obeh členov iz prvega oklepaja z obema členoma iz drugega. Razumevanje lahko preverimo tudi s konkretnimi števili. Če vzamemo $a = 2$ in $b = 3$, je $(2 + 3)^2 = 25$, medtem ko je $2^2 + 3^2 = 13$. Že ta preizkus pokaže, da zapisa nista enakovredna. Pri analizi napake naj učenec zato ne pove le, da »manjka 2ab«, ampak naj pokaže, od kod ta člen pride. Takšna razlaga poveže obrazec z distributivnostjo in zmanjšuje možnost mehanskega pomnjenja.

V primeru kvadrat vsote je najpomembneje najprej določiti, do kod je zapis še matematično utemeljen. Pomembneje od iskanja novega rezultata je, da učenec opazi prvi sporni korak in zna povedati, kaj se je v njem spremenilo. Tako popravek ni le ugibanje, ampak temelji na razumevanju.

Enak napačen zapis pri kvadrat vsote lahko skriva različne vzroke; vprašanje »zakaj?« zato dopolni sam popravek. To se lažje presodi iz učenčeve razlage kot iz samega rezultata. Učitelj lahko zato vpraša, zakaj je učenec izbral prav ta korak.

Učenec naj pri kvadrat vsote ponovno izvede postopek, nato pa primerja napačno in pravilno pot reševanja. Pomembno je, da ne zapiše le pravilne različice, ampak tudi pojasni, zakaj je bil prvotni korak neustrezen.

Po popravku pri kvadrat vsote učenec izbere preverjanje in pojasni, zakaj ga rezultat prepriča. Učenec naj izbere način, ki ustreza vrsti naloge, in pove, zakaj ga rezultat prepriča. Preverjanje zato ni samo ponovitev istega računa.

Razčlenitev (a + b)(a + b) pokaže štiri produkte: a^2, ab, ba in b^2. Dva mešana produkta dasta 2ab. Preprost preizkus a = b = 1 jasno loči pravilen rezultat 4 od napačnega rezultata 2.

Če učenec pravilo pri kvadrat vsote razume, ga bo znal pojasniti tudi pri podobni nalogi z drugačnimi podatki. Učenec nato presodi, ali prvotni način popravka še velja, in svojo odločitev utemelji.

Ocena primera iz kvadrat vsote je uporabnejša, če ločeno zajame prepoznavanje, razlago, popravek in preverjanje. Pet korakov analize pokaže, kateri del učenec že obvlada in pri katerem še potrebuje pomoč.

Zaključna razprava pri kvadrat vsote je namenjena kakovosti utemeljitev, ne iskanju enega pričakovanega stavka. Pomembno je, da učenci svoje rešitve utemeljijo in ne iščejo samo stavka, ki ga želi slišati učitelj.

2.19.7 Linearne enačbe

Ponazoritev napačnega zapisa: 3x + 5 = 20; 3x = 25. Matematično utemeljen popravek: 3x = 15; x = 5. Pri odštevanju 5 z obeh strani dobimo 15. Preizkus v začetni enačbi je $3 \cdot 5 + 5 = 20$. Ta primer je didaktična ponazoritev in ni podatek o odgovorih sodelujočih učencev.

Pri linearnih enačbah je koristno poudariti, da cilj ni »premikanje« členov z ene strani enačbe na drugo, ampak ohranjanje enakosti. Vsako dovoljeno spremembo moramo izvesti na obeh straneh. Če učenec na primer odšteje 5 samo na eni strani, lahko dobi postopek, ki je videti znan, vendar enačbi nista več enakovredni. Pri analizi lahko zato ob vsakem koraku zapiše, katero operacijo je izvedel in ali jo je uporabil na obeh straneh. Dodatno preverjanje je vstavljanje dobljene vrednosti v začetno enačbo. Če leva in desna stran nista enaki, je jasno, da je v postopku napaka, nato pa je treba poiskati njen prvi pojav. Tak pristop učenca spodbuja, da enačbo razume kot ravnotežje dveh izrazov. Tudi kadar končni rezultat po

naključju izpade smiseln, preverjanje v začetni enačbi pokaže, ali je rešitev res ustrezna. Zato je pri tej vsebini povezava med postopkom, razlago in preverjanjem posebej neposredna.

Pri linearnih enačbah učenec najprej primerja izhodiščni zapis s ponujeno rešitvijo in poišče prvi neutemeljeni korak. Poišče prvi korak, ki ni več matematično utemeljen, ter pojasni, zakaj. Na ta način se pozornost preusmeri s samega rezultata na postopek.

Pri linearnih enačbah je treba ločiti naključno pomoto od nerazumevanja postopka; pri tem pomaga učenčeva razlaga. Sam zapis tega pogosto ne razkrije, zato učenčeva razlaga pomaga ugotoviti, kaj je treba še utrditi.

Pri linearnih enačbah naj učenec ob popravku neposredno primerja napačno in pravilno pot ter označi mesto razhajanja. Tako lažje opazi, kje sta se postopka razšla, in svoj popravek tudi utemelji.

Pri linearnih enačbah ima pomembno vlogo tudi preverjanje, ki naj prinese dodaten razlog za pravilnost popravka. Učenec lahko uporabi drugo pot reševanja, obratno operacijo, vstavljanje ali oceno. Cilj je dobiti dodaten razlog, da je popravek pravilen.

Pri reševanju $3x + 5 = 20$ mora odštevanje 5 ohraniti enakost na obeh straneh. Po dobljenem $x = 5$ naj učenec v prvotno enačbo vstavi vrednost. Tako lahko sam odkrije, da vmesni zapis $3x = 25$ ne more biti pravilen.

Pri linearnih enačbah je za nadaljevanje koristna nekoliko spremenjena naloga, ki preveri prenos pravila. Če učenec zna pojasniti, ali se isto pravilo še uporablja, je manj verjetno, da je popravek samo mehansko ponovil.

Pri linearnih enačbah lahko vseh pet kriterijev uporabimo za natančnejšo povratno informacijo o učenčevem razumevanju. Učenec, ki pravilno popravi račun, vendar ne zna razložiti vzroka, namreč potrebuje drugačno povratno informacijo kot učenec, ki razume pravilo, a se računsko zmoti.

Pri skupni razpravi o linearne enačbe lahko učenci primerjajo utemeljitve in različne matematično smiselne načine preverjanja. Različni načini preverjanja so sprejemljivi, če res podpirajo sklep in so matematično smiselni.

2.19.8 Neenačbe

Ponazoritev napačnega zapisa: $-2x > 6$; $x > -3$. Matematično utemeljen popravek: $-2x > 6$; $x < -3$. Pri deljenju neenačbe z negativnim številom obrnemo znak neenačbe. Preizkus $x = -4$ da $8 > 6$. Ta primer je didaktična ponazoritev in ni podatek o odgovorih sodelujočih učencev.

Pri neenačbah je poleg postopkov, ki so podobni reševanju enačb, pomembno še pravilo o spremembi znaka pri množenju ali deljenju z negativnim številom. Učenec lahko to pravilo preveri na zelo preprostem primeru. Če velja $2 < 3$ in obe strani pomnožimo z -1, dobimo $-2 > -3$. S tem postane vidno, zakaj smer neenačaja ne more ostati enaka. Pri analizi napačne rešitve je zato treba najprej ugotoviti, pri katerem koraku je bilo uporabljeno negativno število in ali je bil znak takrat ustrezno obrnjen. Končni rezultat lahko učenec preveri tudi tako, da izbere eno vrednost iz dobljene množice rešitev in jo vstavi v začetno neenačbo. Če trditev ne drži, je rešitev vprašljiva. Takšno preverjanje je uporabno tudi zato, ker učencu pokaže, da rešitev neenačbe navadno ni eno samo število, ampak množica vrednosti. Razlaga napake tako povezuje simbolni postopek s pomenom neenačbe.

Analiza neenačbe naj se začne z vprašanjem, do katerega koraka je rešitev še pravilna. Učenec naj določi, do kod je rešitev še pravilna in kje se pojavi prva nepravilnost. Šele po tej razlagi je smiselno zapisati popravljeno rešitev.

Iz napačnega rezultata pri neenačbah ne moremo neposredno sklepati, katero pravilo je učenec razumel napačno. Učenec naj zato poleg popravka opiše tudi svoje razmišljanje; tako je lažje ugotoviti, ali je šlo za pomoto ali za napačno uporabljeno pravilo.

Popravljanje pri neenačbah je smiselno povezati z razlago pravila, ki upravičuje novi korak. Bolj uporabno je, da pokaže mesto spremembe in na kratko razloži pravilo, zaradi katerega je popravek potreben.

Popravljeni zapis pri neenačbah naj učenec potrdi z dodatnim preizkusom ali smiselnostno presojo. Dobro preverjanje mora biti povezano z nalogo in naj pokaže nekaj več kot zgolj ponovno izvedbo istega postopka.

Pri neenačbi $-2x > 6$ se znak obrne pri deljenju z -2. Preizkus $x = -4$ potrdi $8 > 6$, medtem ko $x = 0$ pogoja ne izpolni. Učenec naj preveri tudi rob $x = -3$, pri katerem velja enakost in zato ne spada med rešitve.

Pri neenačbah lahko prenos pravila preverimo z novim primerom, v katerem se spremeni le en element. Učenec naj napove, kako ta sprememba vpliva na postopek, in razloži svojo odločitev.

Pri neenačbah petstopenjsko vrednotenje pokaže več kot sama pravilnost končnega rezultata. S tem dobimo jasnejšo sliko učenčevega razumevanja, kot če upoštevamo samo pravilnost končnega rezultata.

Zaključek primera iz neenačb naj poudari razlago uporabljenega pravila in način preverjanja. Primerjava argumentov pokaže, kako učenci razumejo postopek in kje bi bilo potrebno dodatno pojasnilo.

2.19.9 Odstotki

Ponazoritev napačnega zapisa: 20 % od 80 = 80/20. Matematično utemeljen popravek: 20 % od 80 = 0,20 · 80 = 16. Odstotek je stotina celote. Ocena smiselnosti pokaže, da mora biti 20 % manj kot celota 80. Ta primer je didaktična ponazoritev in ni podatek o odgovorih sodelujočih učencev.

Pri odstotkihh je pomembno, da učenec jasno določi osnovo, od katere računa odstotek. Pri znižanju cene za 20 % mora najprej ugotoviti, koliko znaša 20 % začetne cene, ali pa neposredno izračunati 80 % začetne vrednosti. Napaka se pogosto pojavi, kadar učenec zamenja odstotek in absolutno spremembo ali ko odstotek računa od napačne osnove. Pri analizi lahko zato poleg računa zapiše tudi stavek, kaj posamezno število predstavlja. Če je začetna cena 80 €, je 20 % od 80 € enako 16 €, nova cena pa 64 €. Rezultat lahko preveri z obratnim razmislekom: razlika med 80 € in 64 € je 16 €, kar je petina začetne cene. Takšna kontrola je enostavna, vendar pokaže, ali učenec razume odnos med začetno vrednostjo, odstotkom in novo vrednostjo. Pri besedilnih nalogah je ta razlaga posebej pomembna, ker pravilen račun še ne zagotavlja, da je bila pravilno izbrana osnova.

Pri primeru iz vsebine odstotki učenec najprej primerja izhodiščni zapis s ponujenim postopkom. Učenec naj primerja zapisani postopek z izhodiščno nalogo in poišče mesto, kjer se pomen ali uporabljeno pravilo spremeni. Šele nato naj oblikuje popravek. Če dobi pravilen rezultat prehitro, še ni nujno, da je razumel vzrok napake.

Učenčeva razlaga je pri odstotkih pomembna zato, ker isti napačen rezultat lahko nastane iz različnih razlogov. Zato je koristno, da učenec pojasni, kako je razmišljal. Njegova razlaga pokaže več kot samo končni popravek.

Učenec naj pri odstotkih ne zapiše le novega rezultata, ampak pokaže tudi prehod od napačnega do pravilnega koraka. Pri primerjavi označi zadnji pravilen in prvi napačen korak ter zapiše razlog za spremembo.

Popravljena rešitev pri odstotkih dobi večjo težo, če jo učenec potrdi še z drugim ustreznim postopkom. Način preverjanja je odvisen od naloge: lahko uporabi obratno operacijo, vstavljanje, drug postopek ali presojo smiselnosti rezultata. S tem pokaže, da rezultata ni sprejel brez dodatnega premisleka.

Dvajset odstotkov pomeni dvajset stotin. Pred računom naj učenec oceni, da je iskani delež manjši od 80 in približno petina te vrednosti. Nato izračuna 0,20 · 80 = 16. Ocena je uporabna kontrola napačne delitve z 20.

Prenos razumevanja pri odstotkih lahko preverimo z različico naloge, v kateri se spremeni le en pogoj. Pri tem naj učenec pojasni, kaj je v novem primeru ostalo enako in kaj se je spremenilo.

Pri odstotkih pet kriterijev omogoča bolj informativno povratno informacijo kot sama oznaka pravilno ali napačno. Ločeno lahko spremljamo, ali je učenec napako opazil, določil njeno mesto, razložil vzrok, izvedel popravek in ga preveril. Tako je tudi povratna informacija natančnejša.

Pri skupni razpravi o odstotki naj bo v ospredju vprašanje, zakaj popravek velja in kako ga je mogoče preveriti. Do pravilnega sklepa lahko pridejo na več načinov, vendar mora biti iz njihove utemeljitve jasno, zakaj popravek velja. Tako se analiza napak poveže tudi z matematičnim sporazumevanjem.

2.19.10 Zaporedno spreminjanje cen

Ponazoritev napačnega zapisa: Zvišanje za 10 % in znižanje za 10 % se izničita. Matematično utemeljen popravek: $100 \cdot 1{,}10 \cdot 0{,}90 = 99$. Drugi odstotek računamo od nove osnove. Ker se osnova spremeni, zaporedni nasprotni spremembi nista simetrični. Ta primer je didaktična ponazoritev in ni podatek o odgovorih sodelujočih učencev.

Zaporedne odstotne spremembe so dober primer, pri katerem intuitivno sklepanje lahko vodi do napačnega rezultata. Če se cena najprej zniža za 10 % in nato zviša za 10 %, sprememb ne moremo preprosto izničiti, ker drugi odstotek računamo od že spremenjene cene. Pri začetni ceni 100 € po znižanju dobimo 90 €, nato pa 10 % od 90 € znaša 9 €, zato je končna cena 99 €. Učenec lahko iz tega primera razloži, zakaj enaka odstotka v nasprotnih smereh ne pomenita nujno vrnitve na začetno vrednost. Pri analizi napake je pomembno določiti, katera vrednost je osnova v posameznem koraku. Koristno je tudi zapisovanje z množilnimi faktorji 0,90 in 1,10, saj produkt 0,99 neposredno pokaže skupni učinek. Tak primer spodbuja natančno branje postopka in je uporaben pri vsakdanjih situacijah, kot so popusti, podražitve in spremembe količin.

Pri zaporednem spreminjanju cen učenec najprej poišče prehod, pri katerem se postopek oddalji od začetne naloge. Pomembneje od iskanja novega rezultata je, da učenec opazi prvi sporni korak in zna povedati, kaj se je v njem spremenilo. Tako popravek ni le ugibanje, ampak temelji na razumevanju.

Napaka pri zaporednem spreminjanju cen je lahko posledica pomote ali napačne uporabe pravila, zato je učenčeva razlaga nujna. To se lažje presodi iz učenčeve razlage kot iz samega rezultata. Učitelj lahko zato vpraša, zakaj je učenec izbral prav ta korak.

Pri zaporednem spreminjanju cen naj učenec popravljeni postopek postavi ob prvotnega in pojasni ključno razliko med njima. Pomembno je, da ne zapiše le pravilne različice, ampak tudi pojasni, zakaj je bil prvotni korak neustrezen.

Pri zaporednem spreminjanju cen naj popravku sledi preverjanje, ki je smiselno povezano z vrsto naloge. Učenec naj izbere način, ki ustreza vrsti naloge, in pove, zakaj ga rezultat prepriča. Preverjanje zato ni samo ponovitev istega računa.

Zaporedni spremembi cene uporabljata različni osnovi. Po zvišanju s 100 na 110 je desetodstotno znižanje enako 11, zato je končna cena 99. Učenec lahko postopek primerja z obratnim vrstnim redom sprememb in ugotovi, da je tudi tam končna vrednost 99.

Razumevanje zaporedno spreminjanje cen lahko preverimo še s sorodnim primerom, pri katerem spremenimo en podatek ali pogoj. Učenec nato presodi, ali prvotni način popravka še velja, in svojo odločitev utemelji.

Vrednotenje pri zaporednem spreminjanju cen naj zajame vseh pet korakov, saj sama oznaka pravilno ali napačno pove premalo. Pet korakov analize pokaže, kateri del učenec že obvlada in pri katerem še potrebuje pomoč.

Primer iz zaporednega spreminjanja cen lahko sklenemo s kratko primerjavo različnih poti do utemeljenega popravka. Pomembno je, da učenci svoje rešitve utemeljijo in ne iščejo samo stavka, ki ga želi slišati učitelj.

2.19.11 Razmerja

Ponazoritev napačnega zapisa: Če 2 zvezka staneta 6 €, stane 5 zvezkov 9 €. Matematično utemeljen popravek: Cena enega zvezka je 3 €; pet jih stane 15 €. Pri sorazmerju najprej določimo vrednost ene enote ali enakovredno razmerje 2 : 6 = 5 : 15. Ta primer je didaktična ponazoritev in ni podatek o odgovorih sodelujočih učencev.

Pri razmerjih je pomembno razlikovati med absolutnimi vrednostmi in odnosom med njimi. Če je razmerje 2 : 3, to ne pomeni, da sta količini 2 in 3, ampak da sta v takem sorazmerju. Zato lahko enako razmerje predstavljajo pari 4 in 6, 6 in 9 ali 10 in 15. Pri napačni rešitvi učenec lahko preveri, ali je pri spreminjanju ene količine ustrezno spremenil tudi drugo. Uporaben način je zapis enakovrednih razmerij ali ulomkov in preverjanje s križnim množenjem, kadar je to primerno. Še pomembneje pa je, da učenec pove, kaj posamezna člena razmerja predstavljata. Pri besedilni nalogi lahko namreč pravilen račun nastane tudi ob napačni razlagi podatkov. Analiza naj zato vključuje tako matematični postopek kot pomen količin. S tem se razmerje ne obravnava samo kot račun, ampak kot opis povezave med dvema vrednostma, kar je pomembno tudi pri sorazmerjih, merilih in odstotkih.

Analiza primera iz razmerja se začne s primerjavo pravilnega izhodišča in prvega spornega prehoda. Poišče prvi korak, ki ni več matematično utemeljen, ter pojasni, zakaj. Na ta način se pozornost preusmeri s samega rezultata na postopek.

Učenčeva utemeljitev pri razmerja pomaga presoditi, ali je šlo za nepazljivost ali za napačno razumljeno pravilo. Sam zapis tega pogosto ne razkrije, zato učenčeva razlaga pomaga ugotoviti, kaj je treba še utrditi.

Popravek pri razmerja je jasnejši, če učenec ob oba postopka zapiše tudi kratko utemeljitev spremembe. Tako lažje opazi, kje sta se postopka razšla, in svoj popravek tudi utemelji.

Zadnji korak pri razmerja je preverjanje z načinom, ki ni le ponovitev istega računa. Učenec lahko uporabi drugo pot reševanja, obratno operacijo, vstavljanje ali oceno. Cilj je dobiti dodaten razlog, da je popravek pravilen.

Če dva enaka zvezka staneta 6 €, je cena enega 3 €. Pet zvezkov zato stane 15 €. Učenec naj pokaže, zakaj povečanje števila zvezkov z 2 na 5 zahteva množenje cene z istim faktorjem, ne prištevanja razlike v številu zvezkov.

Naslednji primer pri razmerja naj vsebuje manjšo spremembo, da se pokaže, ali je učenec razumel pravilo. Če učenec zna pojasniti, ali se isto pravilo še uporablja, je manj verjetno, da je popravek samo mehansko ponovil.

Pet kriterijev pri razmerja pomaga razlikovati med pravilnim popravkom, dobro razlago in kakovostnim preverjanjem. Učenec, ki pravilno popravi račun, vendar ne zna razložiti vzroka, namreč potrebuje drugačno povratno informacijo kot učenec, ki razume pravilo, a se računsko zmoti.

Razprava o razmerja je priložnost, da učenci pojasnijo svoje argumente in presodijo razlage sošolcev. Različni načini preverjanja so sprejemljivi, če res podpirajo sklep in so matematično smiselni.

2.19.12 Ploščina pravokotnika

Ponazoritev napačnega zapisa: Pravokotnik 3 cm × 5 cm ima ploščino 16 cm². Matematično utemeljen popravek: Ploščina je $3 \cdot 5 = 15$ cm². Ploščino dobimo z množenjem dolžin stranic, obseg pa s seštevanjem $2(3 + 5) = 16$ cm. Ta primer je didaktična ponazoritev in ni podatek o odgovorih sodelujočih učencev.

Pri ploščini pravokotnika je koristno ločiti med dolžino, obsegom in ploščino, saj učenci včasih uporabijo pravilne podatke v napačni formuli. Pravokotnik s stranicama 3 cm in 5 cm ima

ploščino 15 cm², ne 16 cm²; vrednost 16 dobimo pri obsegu 2 · (3 + 5). Enote zato predstavljajo pomemben del preverjanja. Če je rezultat izražen v centimetrih namesto v kvadratnih centimetrih, je to lahko opozorilo, da učenec ni računal iskane količine. Pri analizi lahko učenec pravokotnik tudi razdeli na enotske kvadrate in preveri, da jih je v treh vrstah po pet, skupaj 15. Takšna ponazoritev poveže obrazec a · b z geometrijskim pomenom ploščine. Učitelj lahko nato spremeni eno stranico in vpraša, kako se spremeni ploščina. S tem učenec ne uporablja formule le mehansko, ampak razume, kako sta dolžini stranic povezani s številom kvadratnih enot v liku.

V primeru ploščine pravokotnika učenec najprej pregleda zaporedje korakov in označi prvi matematično neutemeljeni prehod. Učenec naj določi, do kod je rešitev še pravilna in kje se pojavi prva nepravilnost. Šele po tej razlagi je smiselno zapisati popravljeno rešitev.

Vzrok napake pri ploščini pravokotnika postane jasnejši šele, ko učenec opiše svoje razmišljanje. Učenec naj zato poleg popravka opiše tudi svoje razmišljanje; tako je lažje ugotoviti, ali je šlo za pomoto ali za napačno uporabljeno pravilo.

Učenec naj pri ploščini pravokotnika poleg pravilnega postopka jasno označi tudi, kaj je bilo treba spremeniti in zakaj. Bolj uporabno je, da pokaže mesto spremembe in na kratko razloži pravilo, zaradi katerega je popravek potreben.

Po popravku pri ploščini pravokotnika sledi preverjanje, ki naj pokaže več kot zgolj ponovno izvajanje istega računa. Dobro preverjanje mora biti povezano z nalogo in naj pokaže nekaj več kot zgolj ponovno izvedbo istega postopka.

Ploščino pravokotnika določimo v kvadratnih centimetrih, obseg pa v centimetrih. Pri stranicah 3 cm in 5 cm dobimo 15 cm² ter 16 cm. Enote omogočajo, da učenec prepozna zamenjavo pojmov tudi takrat, ko sta številčni vrednosti blizu.

Naslednja naloga pri ploščini pravokotnika naj zahteva, da učenec napove vpliv manjše spremembe na postopek. Učenec naj napove, kako ta sprememba vpliva na postopek, in razloži svojo odločitev.

Posamezni koraki analize pri ploščini pravokotnika omogočajo bolj ciljno povratno informacijo o učenčevem delu. S tem dobimo jasnejšo sliko učenčevega razumevanja, kot če upoštevamo samo pravilnost končnega rezultata.

Pri skupnem pregledu ploščina pravokotnika je pomembno, da učenci pojasnijo, zakaj je popravek matematično utemeljen. Primerjava argumentov pokaže, kako učenci razumejo postopek in kje bi bilo potrebno dodatno pojasnilo.

2.19.13 Pitagorov izrek

Ponazoritev napačnega zapisa: Kateti 3 in 4 dasta hipotenuzo 7. Matematično utemeljen popravek: $c^2 = 3^2 + 4^2 = 25$; $c = 5$. Hipotenuza ni vsota katet. Preizkus je kvadratna zveza, rezultat pa mora biti daljši od vsake katete. Ta primer je didaktična ponazoritev in ni podatek o odgovorih sodelujočih učencev.

Pri Pitagorovem izreku je prvi pomemben korak pravilna določitev hipotenuze. Ta je nasproti pravemu kotu in je v enačbi $a^2 + b^2 = c^2$ označena s c. Če učenec napačno izbere stranico, je lahko ves nadaljnji račun tehnično pravilen, rezultat pa kljub temu napačen. Zato naj analiza vključuje tudi skico trikotnika in označitev stranic. Pri trikotniku s katetama 3 in 4 dobimo $c^2 = 9 + 16 = 25$ in $c = 5$. Rezultat lahko preverimo z znanim trojčkom 3–4–5 ali z oceno, da mora biti hipotenuza daljša od vsake katete. Če bi učenec dobil na primer 3,5, bi že ta presoja pokazala težavo. Pri nalogah, kjer iščemo kateto, je treba iz enačbe ustrezno odšteti kvadrat znane katete. Različni tipi nalog zato zahtevajo, da učenec najprej razume geometrijsko situacijo, šele nato uporabi obrazec. To je dober primer povezovanja slike, formule in preverjanja smiselnosti rezultata.

Pri vsebini pitagorov izrek je koristno najprej določiti, kateri korak zahteva preverjanje. Učenec naj primerja zapisani postopek z izhodiščno nalogo in poišče mesto, kjer se pomen ali uporabljeno pravilo spremeni. Šele nato naj oblikuje popravek. Če dobi pravilen rezultat prehitro, še ni nujno, da je razumel vzrok napake.

Pri Pitagorovem izreku napačen zapis sam še ne pokaže, ali je vzrok nepazljivost ali nerazumevanje pravila. Zato je koristno, da učenec pojasni, kako je razmišljal. Njegova razlaga pokaže več kot samo končni popravek.

Popravek pri Pitagorovem izreku naj učenec najprej oblikuje sam in ga šele nato primerja s prvotnim zapisom. Pri primerjavi označi zadnji pravilen in prvi napačen korak ter zapiše razlog za spremembo.

Zadnji korak pri Pitagorovem izreku je smiselno nameniti neodvisnemu preverjanju popravka. Način preverjanja je odvisen od naloge: lahko uporabi obratno operacijo, vstavljanje, drug postopek ali presojo smiselnosti rezultata. S tem pokaže, da rezultata ni sprejel brez dodatnega premisleka.

Pri pravokotnem trikotniku s katetama 3 in 4 je 5 hipotenuza, ker $3^2 + 4^2 = 5^2$. Če učenec dobi 7, je seštel dolžini katet. Skica in preizkus kvadratne zveze skupaj pokažeta, katero količino računa Pitagorov izrek.

Za utrjevanje pitagorov izrek lahko učitelj spremeni en podatek in preveri, ali učenec pravilo prenese na soroden primer. Pri tem naj učenec pojasni, kaj je v novem primeru ostalo enako in kaj se je spremenilo.

Pri vrednotenju primera iz Pitagorovega izreka končni odgovor ni dovolj; pomembno je spremljati vseh pet korakov analize. Ločeno lahko spremljamo, ali je učenec napako opazil, določil njeno mesto, razložil vzrok, izvedel popravek in ga preveril. Tako je tudi povratna informacija natančnejša.

Zaključna razprava o pitagorov izrek lahko primerja različne utemeljitve in načine preverjanja. Do pravilnega sklepa lahko pridejo na več načinov, vendar mora biti iz njihove utemeljitve jasno, zakaj popravek velja. Tako se analiza napak poveže tudi z matematičnim sporazumevanjem.

2.19.14 Povprečna vrednost

Ponazoritev napačnega zapisa: Povprečje 2, 4 in 9 je 15. Matematično utemeljen popravek: (2 + 4 + 9)/3 = 5. Povprečje dobimo tako, da vsoto delimo s številom podatkov. Rezultat mora biti med najmanjšo in največjo vrednostjo. Ta primer je didaktična ponazoritev in ni podatek o odgovorih sodelujočih učencev.

Pri povprečni vrednosti je pomembno, da učenec razume, kaj pomeni deljenje vsote s številom podatkov. Če ima podatke 2, 4 in 9, je vsota 15, podatki pa so trije, zato je povprečje 5. Pogosta napaka nastane, če učenec napačno prešteje podatke ali izpusti eno vrednost. Rezultat lahko preveri s presojo, da mora biti aritmetična sredina med najmanjšo in največjo vrednostjo. Pri navedenem primeru mora biti torej med 2 in 9. Dodatno lahko preveri, ali se odkloni od povprečja uravnotežijo: od 5 so vrednosti oddaljene −3, −1 in +4, vsota teh odklonov pa je 0. Takšno preverjanje je zahtevnejše, vendar dobro pokaže pomen povprečja kot ravnotežne vrednosti. Pri analizi napake naj učenec zato ne napiše le pravilnega računa, ampak tudi navede, koliko podatkov je vključil in zakaj deli prav s tem številom. Tako se zmanjša možnost mehanske uporabe obrazca.

Analiza povprečna vrednost se začne z določitvijo prvega spornega koraka, ne z ugibanjem novega rezultata. Pomembneje od iskanja novega rezultata je, da učenec opazi prvi sporni korak in zna povedati, kaj se je v njem spremenilo. Tako popravek ni le ugibanje, ampak temelji na razumevanju.

Pri povprečni vrednosti je iz samega rezultata težko presoditi, ali gre za računsko nepazljivost ali za napačno predstavo. To se lažje presodi iz učenčeve razlage kot iz samega rezultata. Učitelj lahko zato vpraša, zakaj je učenec izbral prav ta korak.

Popravek pri povprečni vrednosti je najbolj informativen, kadar učenec pokaže mesto spremembe in navede uporabljeno pravilo. Pomembno je, da ne zapiše le pravilne različice, ampak tudi pojasni, zakaj je bil prvotni korak neustrezen.

Popravljeni rezultat pri povprečni vrednosti je treba še preizkusiti z ustreznim neodvisnim načinom. Učenec naj izbere način, ki ustreza vrsti naloge, in pove, zakaj ga rezultat prepriča. Preverjanje zato ni samo ponovitev istega računa.

Vsota podatkov 2, 4 in 9 je 15, povprečje pa 5. Učenec naj razlikuje med vsoto in povprečno vrednostjo ter preveri, ali je rezultat med najmanjšim in največjim podatkom. Povprečje 15 bi bilo pri teh podatkih očitno nesmiselno.

Za prenos znanja pri povprečni vrednosti je uporaben nov primer z manjšo spremembo, ki zahteva ponovno utemeljitev. Učenec nato presodi, ali prvotni način popravka še velja, in svojo odločitev utemelji.

Pri povprečni vrednosti petdelno vrednotenje pokaže, na kateri stopnji učenec potrebuje dodatno podporo. Pet korakov analize pokaže, kateri del učenec že obvlada in pri katerem še potrebuje pomoč.

Ob koncu obravnave povprečna vrednost naj učenci primerjajo razlage in pojasnijo, zakaj posamezen popravek velja. Pomembno je, da učenci svoje rešitve utemeljijo in ne iščejo samo stavka, ki ga želi slišati učitelj.

2.19.15 Verjetnost

Ponazoritev napačnega zapisa: Pri pošteni kocki je verjetnost sodega števila 2/6. Matematično utemeljen popravek: P = 3/6 = 1/2. Med šestimi enako verjetnimi izidi so sodi trije: 2, 4 in 6. Pomembno je jasno opredeliti ugodne izide. Ta primer je didaktična ponazoritev in ni podatek o odgovorih sodelujočih učencev.

Pri verjetnostii je najprej treba jasno določiti množico vseh možnih izidov in nato prešteti ugodne izide. Pri pošteni šeststrani kocki je verjetnost soda števila 3/6 oziroma 1/2, saj so ugodni izidi 2, 4 in 6. Če učenec zapiše 2/6, je koristno vprašati, katere izide je štel in ali je katerega izpustil. Tako se napaka pokaže že pri oblikovanju dogodka, ne šele pri računanju ulomka. Rezultat lahko učenec presodi tudi z zdravorazumsko oceno: soda in liha števila so na običajni kocki zastopana enako pogosto, zato je verjetnost 1/2 smiselna. Pri tej vsebini je pomembno tudi razlikovanje med teoretično verjetnostjo in rezultatom dejanskega poskusa. Če kocko vržemo nekajkrat, ni nujno, da bo polovica metov sodih. Analiza napake zato omogoča pogovor o tem, kaj izračunana verjetnost pomeni in česa ne pomeni.

V primeru verjetnost naj učenec najprej določi, kje ponujeni postopek preneha biti matematično utemeljen. Poišče prvi korak, ki ni več matematično utemeljen, ter pojasni, zakaj. Na ta način se pozornost preusmeri s samega rezultata na postopek.

Pri verjetnosti sam zapis ne razkrije vedno vzroka napake, zato je pomembno vprašati po učenčevem razmišljanju. Sam zapis tega pogosto ne razkrije, zato učenčeva razlaga pomaga ugotoviti, kaj je treba še utrditi.

Primerjava obeh poti pri verjetnosti pomaga, da popravek ne ostane zgolj mehanska zamenjava rezultata. Tako lažje opazi, kje sta se postopka razšla, in svoj popravek tudi utemelji.

Popravek pri verjetnosti naj učenec potrdi z ustreznim preizkusom, oceno ali drugo potjo reševanja. Učenec lahko uporabi drugo pot reševanja, obratno operacijo, vstavljanje ali oceno. Cilj je dobiti dodaten razlog, da je popravek pravilen.

Sodi izidi poštene šeststrane kocke so 2, 4 in 6. Zato so ugodni trije izmed šestih, ne dva. Pred računanjem naj učenec izpiše prostor izidov in označi ugodne primere; to zmanjša možnost, da bi spregledal število 6.

Razumevanje verjetnost lahko utrdimo z različico naloge, ki ni povsem enaka prvotnemu primeru. Če učenec zna pojasniti, ali se isto pravilo še uporablja, je manj verjetno, da je popravek samo mehansko ponovil.

Vrednotenje primera iz verjetnosti je preglednejše, če posebej ocenimo vseh pet korakov dejavnosti. Učenec, ki pravilno popravi račun, vendar ne zna razložiti vzroka, namreč potrebuje drugačno povratno informacijo kot učenec, ki razume pravilo, a se računsko zmoti.

Ob skupnem pregledu verjetnost naj učenci primerjajo predvsem razloge za popravek, ne le končnih odgovorov. Različni načini preverjanja so sprejemljivi, če res podpirajo sklep in so matematično smiselni.

2.19.16 Potence z isto osnovo

Ponazoritev napačnega zapisa: $2^3 \cdot 2^2 = 4^5$. Matematično utemeljen popravek: $2^3 \cdot 2^2 = 2^5 = 32$. Pri množenju potenc z isto osnovo seštejemo eksponente, osnovo pa ohranimo. Ta primer je didaktična ponazoritev in ni podatek o odgovorih sodelujočih učencev.

Pri potencah z isto osnovo je koristno, da učenec pravilo preveri z razpisom faktorjev. Zapis $2^3 \cdot 2^4$ pomeni $(2 \cdot 2 \cdot 2)(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)$, skupaj sedem faktorjev 2, zato je rezultat 2^7. Tako postane jasno, zakaj se pri množenju potenc z isto osnovo eksponenta seštejeta. Če bi učenec eksponenta pomnožil in dobil 2^{12}, lahko oba rezultata preveri tudi številčno: $8 \cdot 16 = 128$, kar je 2^7, ne 2^{12}. Pomembno je tudi opozoriti, da pravilo velja pri množenju potenc z isto osnovo in ga ni mogoče brez premisleka prenesti na seštevanje. Na primer $2^3 + 2^4$ ni 2^7. Pri analizi napake naj učenec zato poleg popravka navede pogoj, pod katerim pravilo velja. Takšna

razlaga pomaga razlikovati med podobnimi zapisi in zmanjšuje nevarnost, da bi se naučena pravila uporabljala avtomatično ne glede na računsko operacijo.

Pri potencah z isto osnovo je izhodišče natančen pregled zapisanih korakov in določitev prve nepravilnosti. Učenec naj določi, do kod je rešitev še pravilna in kje se pojavi prva nepravilnost. Šele po tej razlagi je smiselno zapisati popravljeno rešitev.

Pri potencah z isto osnovo napačen rezultat sam še ne pojasni vzroka, zato je pomembna učenčeva razlaga postopka. Učenec naj zato poleg popravka opiše tudi svoje razmišljanje; tako je lažje ugotoviti, ali je šlo za pomoto ali za napačno uporabljeno pravilo.

Pri potencah z isto osnovo naj popravek ne bo le prepis pravilne rešitve, temveč naj pokaže tudi razlog za spremembo. Bolj uporabno je, da pokaže mesto spremembe in na kratko razloži pravilo, zaradi katerega je popravek potreben.

Ko učenec pri potencah z isto osnovo rešitev popravi, jo še preveri z načinom, ki dopolni prvotni postopek. Dobro preverjanje mora biti povezano z nalogo in naj pokaže nekaj več kot zgolj ponovno izvedbo istega postopka.

Produkt $2^3 \cdot 2^2$ lahko razpišemo kot pet faktorjev 2, zato dobimo $2^5 = 32$. Učenec naj primerja to z izrazom $2^3 + 2^2$, pri katerem se pravilo za množenje potenc ne uporablja. Ključna je vrsta računske operacije.

Za dodatno vajo pri potencah z isto osnovo je primeren soroden primer z eno premišljeno spremembo. Učenec naj napove, kako ta sprememba vpliva na postopek, in razloži svojo odločitev.

Primer iz potenc z isto osnovo je mogoče ovrednotiti po posameznih korakih analize in tako natančneje opisati razumevanje. S tem dobimo jasnejšo sliko učenčevega razumevanja, kot če upoštevamo samo pravilnost končnega rezultata.

Pri potencah z isto osnovo naj bo ob koncu v ospredju utemeljitev, ne le pravilno zapisan rezultat. Primerjava argumentov pokaže, kako učenci razumejo postopek in kje bi bilo potrebno dodatno pojasnilo.

2.19.17 Koreni

Ponazoritev napačnega zapisa: $\sqrt{(9 + 16)} = \sqrt{9} + \sqrt{16}$. Matematično utemeljen popravek: $\sqrt{25} = 5$, medtem ko je $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$. Kvadratni koren se na splošno ne razdeli čez vsoto. Številčni protiprimer napako hitro razkrije. Ta primer je didaktična ponazoritev in ni podatek o odgovorih sodelujočih učencev.

Pri korenihh je smiselno povezati zapis korena s potenciranjem. Če je √16 = 4, to pomeni, da je $4^2 = 16$. Pri izrazu √(9 + 16) moramo najprej izračunati vsoto pod korenom, zato dobimo √25 = 5. Napaka nastane, če učenec koren nepravilno razdeli čez seštevanje in zapiše √9 + √16 = 3 + 4 = 7. Preprost številčni primer takoj pokaže, da 5 in 7 nista enaka. To je dober primer, pri katerem lahko učenec s protiprimerom preveri, ali domnevno pravilo sploh velja. Pomembno je tudi, da razlikuje med $\sqrt{(a^2)}$ in splošnim razdeljevanjem korena čez računske operacije. Pri analizi naj zato navede, kateri korak je bil neupravičen in zakaj. Če zna svoje pravilo preveriti s konkretnim primerom, dobi dodatno orodje za samostojno presojo matematičnih trditev, ne le za popravljanje ene vnaprej pripravljene naloge.

Analizo pri vsebini korenov začnemo z iskanjem prvega mesta, kjer zapis ni več utemeljen. Učenec naj primerja zapisani postopek z izhodiščno nalogo in poišče mesto, kjer se pomen ali uporabljeno pravilo spremeni. Šele nato naj oblikuje popravek. Če dobi pravilen rezultat prehitro, še ni nujno, da je razumel vzrok napake.

Iz končnega zapisa pri korenih ni mogoče zanesljivo razločiti pomote od napačno razumljenega postopka. Zato je koristno, da učenec pojasni, kako je razmišljal. Njegova razlaga pokaže več kot samo končni popravek.

Pri popravljanju primera s koreni je smiselno jasno označiti, kje se pravilna pot loči od napačne. Pri primerjavi označi zadnji pravilen in prvi napačen korak ter zapiše razlog za spremembo.

Pri korenih je pomembno, da učenec pravilnega rezultata ne sprejme brez dodatnega preizkusa. Način preverjanja je odvisen od naloge: lahko uporabi obratno operacijo, vstavljanje, drug postopek ali presojo smiselnosti rezultata. S tem pokaže, da rezultata ni sprejel brez dodatnega premisleka.

Primer √(9 + 16) pokaže, da korena ne razdelimo čez vsoto: leva stran je 5, vsota posameznih korenov pa 7. En številčni protiprimer zadostuje, da ovrže splošno napačno pravilo. Učenec lahko nato preveri, zakaj koren produkta zahteva drugačne pogoje.

Naslednja naloga pri korenih naj vsebuje manjšo spremembo, ob kateri mora učenec pojasniti, kaj ostane enako. Pri tem naj učenec pojasni, kaj je v novem primeru ostalo enako in kaj se je spremenilo.

Ocena razumevanja pri korenih je natančnejša, če ločeno pogledamo prepoznavanje, mesto napake, razlago, popravek in preverjanje. Ločeno lahko spremljamo, ali je učenec napako opazil, določil njeno mesto, razložil vzrok, izvedel popravek in ga preveril. Tako je tudi povratna informacija natančnejša.

Ob koncu primera s koreni je smiselno primerjati argumente učencev, ne le njihovih rezultatov. Do pravilnega sklepa lahko pridejo na več načinov, vendar mora biti iz njihove

utemeljitve jasno, zakaj popravek velja. Tako se analiza napak poveže tudi z matematičnim sporazumevanjem.

2.19.18 Koordinatni sistem

Ponazoritev napačnega zapisa: Točka (2, −3) ima x = −3. Matematično utemeljen popravek: Točka ima x = 2 in y = −3. Prva koordinata določa vodoravni položaj, druga navpičnega. Preverjanje vključuje pravilno orientacijo osi. Ta primer je didaktična ponazoritev in ni podatek o odgovorih sodelujočih učencev.

Pri koordinatnem sistemu napaka pogosto ni računska, ampak je povezana z branjem urejenega para. Pri točki (2, −3) prva koordinata določa vodoravni premik po osi x, druga pa navpični premik po osi y. Če učenec koordinati zamenja, dobi drugo točko, čeprav uporabi isti števili. Zato je pri analizi koristno, da poleg zapisa točko tudi nariše ali opiše pot od izhodišča: dve enoti desno in tri enote navzdol. Nato lahko preveri, v katerem kvadrantu se točka nahaja. Pri točki (2, −3) mora biti x pozitiven in y negativen, zato leži v četrtem kvadrantu. Takšna prostorska kontrola hitro razkrije zamenjavo predznaka ali vrstnega reda koordinat. Učitelj lahko doda še točko (−3, 2) in učenca prosi, naj pojasni razliko. Primerjava pokaže, da urejeni par ni samo seznam dveh števil, ampak natančno določen zapis položaja v ravnini.

V primeru koordinatnega sistema je najpomembneje najprej določiti, do kod je zapis še matematično utemeljen. Pomembneje od iskanja novega rezultata je, da učenec opazi prvi sporni korak in zna povedati, kaj se je v njem spremenilo. Tako popravek ni le ugibanje, ampak temelji na razumevanju.

Enak napačen zapis pri koordinatnem sistemu lahko skriva različne vzroke; vprašanje »zakaj?« zato dopolni sam popravek. To se lažje presodi iz učenčeve razlage kot iz samega rezultata. Učitelj lahko zato vpraša, zakaj je učenec izbral prav ta korak.

Učenec naj pri koordinatnem sistemu ponovno izvede postopek, nato pa primerja napačno in pravilno pot reševanja. Pomembno je, da ne zapiše le pravilne različice, ampak tudi pojasni, zakaj je bil prvotni korak neustrezen.

Po popravku pri koordinatnem sistemu učenec izbere preverjanje in pojasni, zakaj ga rezultat prepriča. Učenec naj izbere način, ki ustreza vrsti naloge, in pove, zakaj ga rezultat prepriča. Preverjanje zato ni samo ponovitev istega računa.

Pri točki (2, −3) je prva koordinata vodoravni premik za 2, druga pa navpični premik za −3. Učenec naj točko vriše in nato odčita koordinati nazaj. Takšen dvosmerni preizkus razkrije zamenjavo vrstnega reda koordinat.

Če učenec pravilo pri koordinatnem sistemu razume, ga bo znal pojasniti tudi pri podobni nalogi z drugačnimi podatki. Učenec nato presodi, ali prvotni način popravka še velja, in svojo odločitev utemelji.

Ocena primera iz koordinatnega sistema je uporabnejša, če ločeno zajame prepoznavanje, razlago, popravek in preverjanje. Pet korakov analize pokaže, kateri del učenec že obvlada in pri katerem še potrebuje pomoč.

Zaključna razprava pri koordinatnem sistemu je namenjena kakovosti utemeljitev, ne iskanju enega pričakovanega stavka. Pomembno je, da učenci svoje rešitve utemeljijo in ne iščejo samo stavka, ki ga želi slišati učitelj.

2.20 Pregled dosedanjih raziskav

Raziskave o matematičnih napakah obravnavajo različne udeležence in različne izide. Hoth, Larrain in Kaiser (2022) so proučevali učiteljevo zmožnost, da v učenčevem zapisu napako opazi in jo v učni situaciji razloži. Njihova raziskava se torej nanaša predvsem na diagnostično kompetenco učitelja. Larrain in Kaiser (2022) sta podobno preučevala bodoče učitelje in njihovo interpretacijo učenčevih napak. Iz teh raziskav ni mogoče neposredno sklepati, koliko bi učenci napredovali pri dejavnosti »Matematični detektivi«; pomagata pa utemeljiti, zakaj učiteljeva razlaga vzroka napake ni enaka zgolj označitvi napačnega rezultata.

Khasawneh, Al-Barakat in Almahmoud (2022) so pri 45 učencih sedmega razreda raziskali poučevanje sorazmerij, ki je vključevalo analizo pravilnih in napačnih rešitev. Učenci so bili razporejeni v eksperimentalno in kontrolno skupino, avtorji pa so poročali o boljšem sorazmernem sklepanju v eksperimentalni skupini. Njihov načrt omogoča drugačno presojo učinka kot pri tukaj opisanem preverjanju pred dejavnostjo in po njej brez kontrolne skupine. Razlikujeta se tudi vsebina nalog in način merjenja, zato številčnih rezultatov obeh raziskav ne primerjamo neposredno.

Metcalfe (2017) v pregledu psiholoških raziskav obravnava pogoje, v katerih lahko povratna informacija po napaki podpira učenje. Za pouk matematike iz tega izhaja smiselno vprašanje, ali učenec po opozorilu napako tudi razume. Maskos, Schulz, Oeksuez in Rakoczy (2025) v sistematičnem pregledu formativnega spremljanja pri matematiki poudarjajo pomen informacij o učenčevem razumevanju za nadaljnje poučevanje. Dejavnost s petimi koraki je mogoče razumeti kot način pridobivanja takšnih informacij, vendar to samo po sebi še ni dokaz njene učinkovitosti.

Xie, Zeng in Yang (2024) so v metaanalizi našli pozitivno povezanost med metakognicijo in dosežki pri matematiki. Povezanost še ne pomeni, da bo vsako spodbujanje preverjanja rešitev povzročilo višji dosežek. V tej nalogi je preverjanje rezultata eden od opazovanih kriterijev;

zato je metakognitivna literatura koristno teoretično izhodišče, ne pa nadomestek za primerjalno raziskavo dejavnosti. Skupna vrzel, ki jo naloga naslavlja opisno, je razčlenitev učenčeve analize napake na prepoznavanje, določanje mesta, razlago, popravek in preverjanje.

3 EMPIRIČNI DEL

3.1 Časovni potek raziskave

Raziskovalno delo je potekalo od aprila do junija 2026 ter septembra 2026. Zaporedje raziskave je obsegalo začetno preverjanje, izvedbo dejavnosti »Matematični detektivi«, končno preverjanje in vprašalnik o doživljanju dejavnosti.

3.2 Postopek zbiranja podatkov

Podatki so bili zbrani z začetnim in končnim preverjanjem znanja, vprašalnikom o doživljanju dejavnosti ter pregledom pisnih odgovorov učencev. Pri preverjanjih je bilo mogoče doseči največ 30 točk. Rezultati so v nalogi predstavljeni anonimizirano; imena učencev in drugi neposredni identifikacijski podatki niso navedeni.

3.3 Raziskovalna metoda

Raziskava uporablja kombinacijo kvantitativnega in kvalitativnega pristopa. Kvantitativni del temelji na opisni primerjavi dosežkov istega vzorca pri začetnem in končnem preverjanju ter na povprečnih ocenah iz vprašalnika.

Kvantitativni podatki so obdelani z opisno statistiko: s povprečji, razlikami med povprečji in deleži uspešnih rešitev pri petih kriterijih. Kvalitativni del temelji na vsebinskem pregledu izbranih pisnih razlag učencev.

Uporabljeni načrt omogoča opis sprememb v obravnavanem vzorcu, zaradi odsotnosti kontrolne skupine pa ne omogoča vzročnega sklepanja o učinku dejavnosti.

3.4 Hipoteze

Hipoteza 1 (H1): Povprečni dosežek pri končnem preverjanju bo v opisanem vzorcu višji kakor pri začetnem preverjanju. Hipoteza 2 (H2): Delež uspešnih rešitev bo pri končnem preverjanju višji pri vsakem od petih spremljanih kriterijev.

Hipoteza 3 (H3): Povprečne ocene treh izbranih trditev, za katere so ohranjeni zbirni podatki, bodo višje od sredine petstopenjske lestvice. Hipoteze so oblikovane za opisani vzorec in same po sebi ne pomenijo trditve o vzročnem učinku dejavnosti.

3.5 Raziskovalni vzorec

V raziskavi je sodelovalo 32 učencev, od tega 16 učencev 8. razreda in 16 učencev 9. razreda. Gre za majhen priložnostni vzorec, zato rezultatov ni mogoče posplošiti na širšo populacijo učencev.

Vsi predstavljeni rezultati se nanašajo na ta vzorec. Primerjava med 8. in 9. razredom je opisna, saj skupini nista bili oblikovani z naključnim razporejanjem.

3.6 Izvedba dejavnosti »Matematični detektivi«

Dejavnost je bila izvedena po petstopenjskem modelu. Učenec najprej PREPOZNA, ali je prikazana rešitev pravilna.

Pri koraku RAZIŠČI določi prvi zapis, pri katerem postopek ni več matematično veljaven, in razmisli o vzroku napake.

Pri koraku POPRAVI začne pri mestu napake ponovno računati in zapiše matematično ustrezen nadaljnji postopek.

Pri koraku PREVERI rezultat preizkusi v začetni nalogi ali z drugim ustreznim postopkom.

Pri koraku RAZLOŽI s svojimi besedami pojasni, kaj je bilo napačno, zakaj je bilo napačno in kako je treba postopek izvesti pravilno.

Po dejavnosti je sledilo končno preverjanje, nato pa vprašalnik o doživljanju dejavnosti.

3.7 Kriteriji uspešnosti

Pet spremljanih kriterijev ustreza petim različnim zahtevam: prepoznati nepravilnost, določiti njen prvi pojav v postopku, razložiti vzrok, pravilno popraviti rešitev in preveriti rezultat.

Njihovo ločeno spremljanje omogoča razlikovanje med učencem, ki napako le opazi, in učencem, ki jo zna tudi pojasniti.

Za pet kriterijev so prikazani deleži uspešnih rešitev pred dejavnostjo in po njej. Priloga 3 vsebuje tri naloge in točkovnik s skupno 30 točkami. Ker posamezni izvirni ocenjevalni listi niso vključeni v nalogo, skladnosti vsake posamezne dodeljene točke ni mogoče ponovno preveriti.

Pri vsaki od treh nalog je bilo pet kriterijev ovrednotenih z 0, 1 ali 2 točkama, zato je bila posamezna naloga vredna največ 10 točk, celotno preverjanje pa 30 točk. Tak način točkovanja omogoča, da skupni rezultat dopolnimo z ločenim pregledom uspešnosti pri posameznih kriterijih. Podrobni točkovnik je prikazan v prilogi 3.

3.8 Vprašalnik o doživljanju dejavnosti

Po dejavnosti so učenci trditve ocenjevali na petstopenjski lestvici. Med obravnavanimi trditvami so bile miselna zahtevnost, zanimivost, primerjanje rešitev z drugimi in pogostejše preverjanje rezultata. Za tri trditve so v nalogi predstavljena povprečja 4,5, 4,3 in 4,2.

Celoten uporabljeni vprašalnik je priložen v prilogi 4. Za vse trditve pa niso ohranjeni popolni številčni rezultati, število veljavnih odgovorov pri posamezni trditvi in porazdelitev ocen. Zato povprečij ne uporabljamo za trditve o vseh učencih ali o trajni spremembi njihovega ravnanja.

3.9 Etični vidiki raziskave

Pri izvedbi raziskave je bilo pomembno varovanje zasebnosti sodelujočih učencev. V nalogi zato niso navedena imena učencev ali drugi neposredni identifikacijski podatki, rezultati pa so predstavljeni anonimizirano.

Podatki o načinu pridobivanja soglasij, obveščanju učencev oziroma staršev in postopkih varovanja zbranih podatkov v raziskovalni nalogi niso podrobneje predstavljeni. To predstavlja omejitev dokumentacije etičnega postopka raziskave.

Rezultati so predstavljeni kot povprečja in deleži celotnega vzorca.

3.10 Metodološke omejitve empiričnega dela

Empirični del temelji na zbirnih povprečjih, deležih po kriterijih in anonimiziranih parih skupnih točk v prilogi 1. V prilogi 2 so predstavljeni štirje izbrani besedilni odgovori učencev, uporabljeni vprašalnik pa je v celoti priložen v prilogi 4. V nalogo niso vključeni vsi izvirni

izdelki, posamezni ocenjevalni listi in natančni datumi posameznih izvedb; prav tako za vse postavke vprašalnika niso ohranjeni popolni individualni številčni odgovori. Iz prikazanih podatkov je mogoče preveriti izračun povprečij in opisati posamezne spremembe, ni pa mogoče ponovno neodvisno oceniti vseh izvirnih odgovorov.

Kljub navedenim omejitvam lahko raziskava ponudi uporaben vpogled v to, kako se učenci odzivajo na strukturirano delo z matematičnimi napakami in katere vidike analize napak je mogoče spremljati.

4 REZULTATI

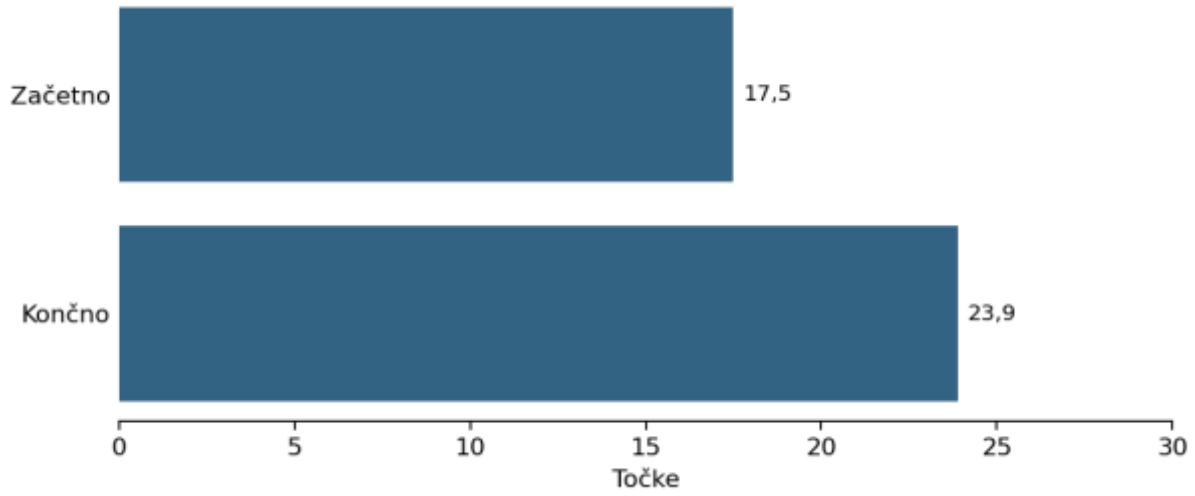
4.1 Rezultati začetnega in končnega preverjanja

Preglednica 1: Povprečni dosežek pri preverjanjih

Meritev	Povprečje od 30 točk
Začetno preverjanje	17,5
Končno preverjanje	23,9
Razlika	+6,4

Vir: lasten

Graf 1: Povprečni rezultat od 30 možnih točk

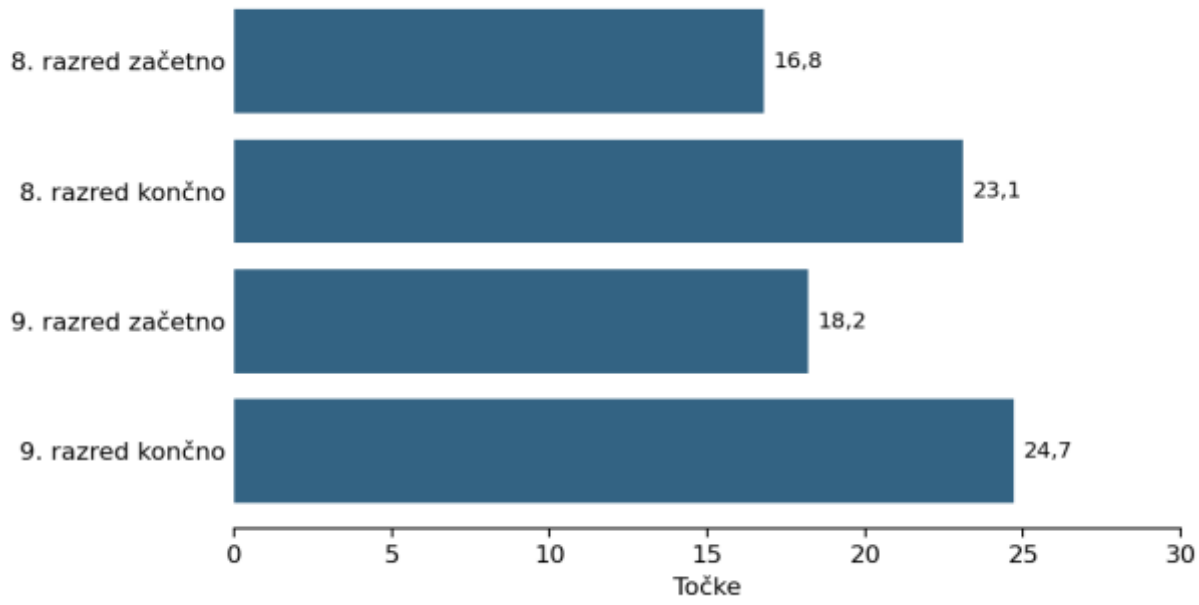


Vir: lasten

Preglednica 1 kaže, da je bila povprečna razlika med preverjanjema 6,4 točke od 30. Graf 1 ponazori obseg spremembe na isti lestvici. Gre za opisno primerjavo istega vzorca pred dejavnostjo in po njej; brez primerjalne skupine iz grafa ni mogoče sklepati, kolikšen del spremembe je posledica dejavnosti.

Iz 32 parov točk v prilogi 1 dobimo vsoto 560 točk pri začetnem in 764 pri končnem preverjanju. Natančno končno povprečje je 23,875 točke, po zaokrožitvi na eno decimalko 23,9; povprečna razlika je 6,375 oziroma zaokroženo 6,4 točke. Mediana se je povečala s 17 na 24 točk. Začetni rezultati segajo od 13 do 22 točk, končni pa od 17 do 29. To so opisne značilnosti prikazanega vzorca, brez sklepanja o učinku na širšo populacijo.

Graf 2: Povprečni rezultat po razredih



Vir: lasten

V obeh razredih je bila povprečna sprememba podobna: v 8. razredu približno 6,3 točke, v 9. razredu približno 6,5 točke. Posamezni pari skupnih točk so navedeni v prilogi 1. Razredni povprečji ne pomenita, da je vsak učenec napredoval enako.

V preglednici je končni rezultat pri vseh 32 parih višji od začetnega. Razlike pri posameznikih segajo od 4 do 10 točk; enajst učencev ima razliko 4 ali 5 točk, enajst razliko 6 ali 7 točk in deset razliko 8 do 10 točk. Takšen prikaz pokaže, da povprečna sprememba ne predstavlja

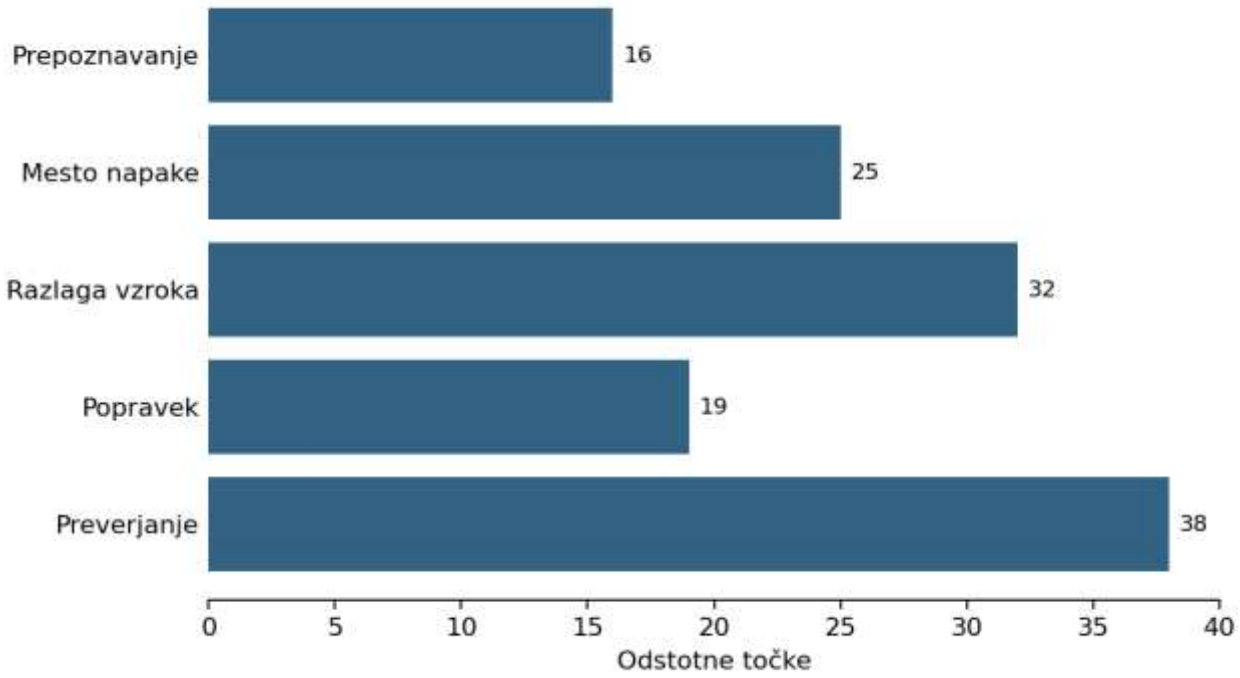
vseh učencev enako. Ker ni primerjalne skupine in zakasnjenega preverjanja, niti dosleden napredek v tej preglednici ne dokazuje, da ga je povzročila prav dejavnost.

Preglednica 2: Uspešnost po kriterijih

Kriterij	Pred	Po
Prepoznavanje napake	78 %	94 %
Določanje mesta napake	61 %	86 %
Razlaga vzroka	43 %	75 %
Popravljanje rešitve	69 %	88 %
Preverjanje rezultata	29 %	67 %

Vir: lasten

Graf 3: Sprememba uspešnosti po kriterijih

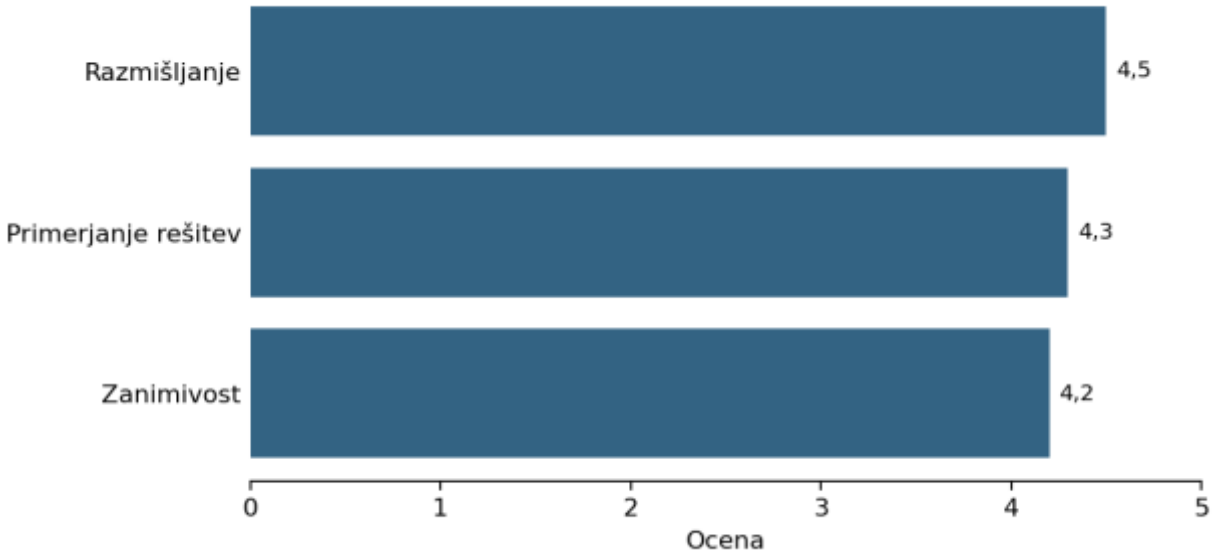


Vir: lasten

Največji opisni premik med petimi kriteriji je pri preverjanju rezultata, in sicer za 38 odstotnih točk. Sledi razlaga vzroka napake z 32 odstotnimi točkami. Vrednosti so deleži uspešnih rešitev

pri posameznem kriteriju, zato jih ni mogoče neposredno enačiti s povprečnimi točkami celotnega preverjanja.

Graf 4: Povprečne ocene izbranih trditev



Vir: lasten

Ocene vprašalnika kažejo, da so učenci posebej poudarili miselni napor in primerjanje rešitev. V prikazu so le povprečja trditev, ki so izrecno zapisana v zbirnih podatkih. Ker ni individualnih odgovorov in podatka o razpršenosti, majhnih razlik med ocenami ni primerno preveč poudarjati.

Rezultati začetnega in končnega preverjanja kažejo izboljšanje povprečnega dosežka učencev po izvedbi dejavnosti »Matematični detektivi«.

Pri začetnem preverjanju so učenci v povprečju dosegli 17,5 od 30 možnih točk, pri končnem preverjanju pa 23,9 točke.

Pri popravljanju rešitve se je uspešnost povečala z 69 % na 88 %, kar predstavlja 19 odstotnih točk povečanja. Rezultat kaže, da je večina učencev po izvedbi dejavnosti uspešno izvedla pravilen postopek. Pri tem je treba razlikovati med popravljanjem in razumevanjem. Učenec

lahko pravilno popravi postopek, vendar brez ustrezne razlage še ni mogoče zanesljivo sklepati, da razume vzrok prvotne napake.

4.2 Rezultati glede na razred

V 8. razredu je navedeno povprečje zraslo s 16,8 na 23,1 točke od 30 (+6,3), v 9. razredu pa z

18,2 na 24,7 (+6,5). Učenci 9. razreda so imeli nekoliko višji rezultat pri obeh preverjanjih, velikost opisne spremembe pa je bila v obeh skupinah podobna.

Te razlike niso ocena učinka po starosti. Razreda nista bila naključno oblikovana, iz primerjave dosežkov pa ni mogoče ločiti vpliva dejavnosti od drugih okoliščin pouka.

4.3 Uspešnost pri posameznih kriterijih

Podrobnejši pregled pokaže spremembe pri vseh petih spremljanih kriterijih.

Raziskava zato razlikuje med več ravnmi uspešnosti. Učenec lahko napako prepozna, vendar je ne zna locirati. Lahko jo locira, vendar ne zna razložiti vzroka. Lahko jo popravi, vendar rezultata ne preveri. Prav ta razlika med ravnmi je pomembna za razumevanje razvoja matematičnega mišljenja.

4.4 Prepoznavanje matematične napake

Pri prepoznavanju napake se je uspešnost povečala z 78 % na 94 %.

Že pred izvedbo dejavnosti je večina učencev znala ugotoviti, ali je predstavljena rešitev pravilna. Po dejavnosti je bil delež uspešnih odgovorov še višji.

Ta rezultat kaže, da je bilo prepoznavanje napake za učence razmeroma dostopno. Hkrati pa rezultat opozarja na razliko med prepoznavanjem in poglobljeno analizo.

4.5 Določanje mesta napake

Delež uspešnih odgovorov pri določanju prvega napačnega koraka se je v prikazanih rezultatih povečal z 61 % na 86 %, torej za 25 odstotnih točk. Kriterij je zahtevnejši od splošne ugotovitve, da je rešitev napačna, saj mora učenec primerjati zaporedne korake in določiti prehod, pri katerem enakovrednost zapisov odpove.

4.6 Razlaga vzroka napake

Pri razlagi vzroka napake se je uspešnost povečala s 43 % na 75 %, kar pomeni povečanje za 32 odstotnih točk.

To je ena pomembnejših ugotovitev raziskave, saj je razlaga vzroka zahtevnejša od prepoznavanja napake.

To podpira izhodišče, da analiza matematične napake vključuje več različnih ravni mišljenja.

4.7 Popravljanje matematične rešitve

Pri popravljanju rešitve se je uspešnost povečala z 69 % na 88 %, kar predstavlja 19 odstotnih točk povečanja.

Rezultat kaže, da je večina učencev po izvedbi dejavnosti uspešno izvedla pravilen postopek.

Pri tem je treba razlikovati med popravljanjem in razumevanjem. Učenec lahko pravilno popravi postopek, vendar brez ustrezne razlage še ni mogoče zanesljivo sklepati, da razume vzrok prvotne napake.

Ugotovitve so v širšem smislu skladne z literaturo, ki poudarja pomen analize napak, diagnostičnega dela in metakognitivnega spremljanja. Rezultat pri popravljanju je zato smiselno obravnavati skupaj z rezultati pri razlagi vzroka in preverjanju, saj pravilen popravek sam po sebi še ne pokaže celotnega razumevanja postopka.

4.8 Preverjanje rezultata

Uspešnost pri preverjanju rezultata je z 29 % narasla na 67 %, kar je največja navedena razlika med petimi kriteriji: 38 odstotnih točk. Kljub temu je bil končni delež pri preverjanju nižji kot pri prepoznavanju napake (94 %) ali popravljanju rešitve (88 %). To nakazuje, da je samostojno preverjanje zahtevna stopnja postopka; o vzroku razlike iz zbirnih podatkov ne moremo sklepati.

4.9 Rezultati vprašalnika

Prikazane so povprečne ocene treh trditev: miselna zahtevnost dejavnosti 4,5, primerjanje rešitev z drugimi 4,3 in zanimivost 4,2 na petstopenjski lestvici. Vse tri vrednosti so nad sredino lestvice. Visoka ocena miselne zahtevnosti pomeni, da so učenci dejavnost doživljali kot

zahtevno, medtem ko oceni primerjanja rešitev in zanimivosti kažeta ugodno vrednotenje teh dveh vidikov.

Za druge trditve ni ohranjenih popolnih številčnih rezultatov. Odgovori o tem, kaj je bilo učencem všeč, ne dokazujejo izboljšanja znanja; to je ločeno raziskovalno vprašanje, ki ga obravnavata začetno in končno preverjanje.

4.10 Kvalitativna analiza odgovorov učencev

Priloga 2 vsebuje štiri izbrane anonimizirane odgovore učencev. Kažejo razpon od prepoznave

nepravilnosti do utemeljenega popravka in preverjanja. Ker vsi izvirni izdelki niso vključeni v nalogo in način izbire teh štirih odgovorov ni podrobneje opisan, iz njih ni mogoče sklepati o pogostosti posameznih ravni razlage v celotnem vzorcu.

Didaktični primer z enačbo $2(x + 3) = 14$ pokaže razliko v kakovosti razlage: pri odstranjevanju oklepaja je treba število 2 pomnožiti z obema členoma. Zapis $2x + 3$ zato ni enakovreden začetni enačbi; popravek $2x + 6 = 14$ omogoči nadaljnje pravilno reševanje.

5 RAZPRAVA

5.1 Odgovor na prvo raziskovalno vprašanje

Povprečni dosežek se je povečal s 17,5 na 23,9 točke od 30, torej za 6,4 točke. Rezultati zato v opisanem vzorcu podpirajo H1: povprečni dosežek pri končnem preverjanju je bil višji kakor pri začetnem preverjanju.

H1 je bila v tem vzorcu podprta, vendar tega ne moremo razlagati kot dokaz, da je razliko povzročila samo dejavnost. Ker raziskava ni imela kontrolne skupine in učenci niso bili naključno razporejeni, so možne tudi druge razlage, na primer učinek ponavljanja, običajnega pouka ali večja domačnost z vrsto nalog.

5.2 Odgovor na drugo raziskovalno vprašanje

Drugo raziskovalno vprašanje je, ali se je po izvedbi dejavnosti spremenila uspešnost pri posameznih korakih analize matematične napake. Rezultati kažejo višji delež uspešnih odgovorov pri vseh petih kriterijih. Prepoznavanje napake se je povečalo z 78 % na 94 % (+16

odstotnih točk), določanje mesta napake z 61 % na 86 % (+25), razlaga vzroka s 43 % na 75 % (+32), popravljanje rešitve z 69 % na 88 % (+19), preverjanje rezultata pa z 29 % na 67 % (+38).

Največja opisna razlika je bila pri preverjanju rezultata, vendar je bila tudi po dejavnosti uspešnost pri tem kriteriju nižja kakor pri prepoznavanju in popravljanju napake. Ker so bili končni deleži višji pri vseh petih kriterijih, rezultati za opisani vzorec podpirajo H2. Vzorec sprememb je vsebinsko skladen z zasnovo dejavnosti, ki učence vodi skozi več korakov analize napake, vendar zaradi raziskovalnega načrta ni mogoče ugotoviti, kolikšen del sprememb je mogoče pripisati prav tej dejavnosti.

5.3 Odgovor na tretje raziskovalno vprašanje

Rezultati vprašalnika omogočajo opis treh vidikov dejavnosti, za katere so ohranjena povprečja. Učenci so miselno zahtevnost ocenili s 4,5, koristnost primerjanja rešitev z drugimi s 4,3 in zanimivost s 4,2 na petstopenjski lestvici. Vse tri vrednosti so nad sredino lestvice, vendar jih ni smiselno razlagati enako: prva izraža zaznano zahtevnost, drugi dve pa ugodno vrednotenje dejavnosti.

Na podlagi predstavljenih povprečij rezultati za tri izbrane trditve podpirajo H3. Celoten vprašalnik je prikazan v prilogi 4, vendar za vse postavke niso ohranjeni popolni individualni številčni odgovori in porazdelitve ocen, zato ugotovitve ni mogoče razširiti na vse vidike doživljanja dejavnosti.

5.4 Primerjava rezultatov z izhodišči raziskave

Pri primerjavi z raziskavo Khasawneh idr. (2022) je pomembna razlika v raziskovalnem načrtu. Njihova raziskava je vključevala kontrolno skupino, moja pa en priložnostni vzorec. Povečanje povprečja za 6,4 točke zato razumem kot razliko med začetnim in končnim preverjanjem pri sodelujočih učencih, ne kot neposreden dokaz učinka dejavnosti.

Največji navedeni razliki sta pri preverjanju rezultata in razlagi vzroka. To se ujema s teoretično razliko med prepoznavanjem napake ter pojasnjevanjem in nadzorom lastnega postopka, ki jo osvetljujejo Hoth idr. (2022), Larrain in Kaiser (2022) ter Metcalfe (2017). Ujemanje je vsebinsko, ne statistična potrditev teh teorij. Ker ni izvirnih odgovorov in opisa zanesljivosti točkovanja, kakovosti posameznih razlag ne moremo ponovno oceniti.

Ugotovitve so v širšem smislu skladne z literaturo, ki poudarja pomen analize napak, diagnostičnega dela in metakognitivnega spremljanja. Hkrati pa rezultatov te raziskave zaradi drugačnega raziskovalnega načrta ni mogoče neposredno enačiti z rezultati drugih raziskav.

5.5 Izvirni prispevek k praksi in teoriji

Osrednji praktični prispevek naloge je strukturiran petstopenjski model dejavnosti »Matematični detektivi«, ki učenca vodi od prepoznavanja napake do njenega pojasnjevanja, popravljanja in preverjanja. Model je mogoče prilagoditi različnim matematičnim vsebinam, zato ni vezan na eno vrsto nalog. Učitelju ponuja ponovljiv okvir za delo z napačnimi rešitvami in za formativno spremljanje učenčevega razmišljanja.

Za učiteljsko prakso je posebej uporabno ločeno spremljanje petih kriterijev, saj omogoča razlikovanje med učencem, ki napako le opazi, in učencem, ki zna določiti njen izvor, pojasniti vzrok, utemeljiti popravek ter preveriti rezultat. Tako lahko učitelj povratno informacijo usmeri na konkretni korak, pri katerem učenec potrebuje podporo. Prispevek naloge k teoretičnemu razmisleku je povezava tega praktičnega modela z ugotovitvami o učenju iz napak, metakogniciji in diagnostičnem pomenu učenčevih postopkov; zaradi opisnega raziskovalnega načrta pa naloga ne uveljavlja nove splošne teorije.

5.6 Predlog izboljšave raziskave

Če bi raziskavo ponovila, bi vključila več učencev in primerjalno oziroma kontrolno skupino. Tako bi lažje presodila, koliko je sprememba povezana z dejavnostjo in koliko z dodatno vajo ali običajnim poukom.

Ena skupina bi lahko uporabljala dejavnost »Matematični detektivi«, druga pa bi enako matematično vsebino obravnavala z običajnimi vajami. Skupini bi morali biti čim bolj primerljivi, navodila in čas dela pa vnaprej določeni.

Natančneje bi beležila tudi potek posameznih ur, čas med preverjanjema in obseg učiteljeve pomoči. Začetno in končno preverjanje bi pripravila kot dve primerljivo zahtevni različici z enakimi vrstami znanja in koraki analize, vendar z drugimi številskimi podatki. S tem bi zmanjšala vpliv poznavanja konkretnih nalog.

Ohranila bi vse anonimizirane rešitve in ocenjevalne liste. Del odgovorov bi lahko neodvisno ocenila dva ocenjevalca in nato primerjala ocene. Tako bi bilo točkovanje bolje dokumentirano, hkrati pa bi bilo mogoče natančneje spremljati spremembe pri posameznih učencih.

Dodala bi tudi zakasnjeno preverjanje z novimi, primerljivo zahtevnimi nalogami. Tako bi lahko preverila, ali se spremembe ohranijo tudi čez čas in ali učenci način analize prenesejo na nove primere. Pri kvalitativnem delu bi vključila več anonimiziranih odgovorov in vnaprej določila merila za njihov izbor.

Pri vprašalniku bi poleg povprečij shranila tudi število veljavnih odgovorov in porazdelitev ocen pri vsaki trditvi. Enako povprečje lahko namreč nastane iz precej različnih odgovorov. Odprte odgovore bi razvrstila v vnaprej določene vsebinske kategorije, na primer koristnost primerjanja rešitev, zahtevnost razlage, pomen preverjanja in odnos do napak.

Za izvedbo bi bilo smiselno pripraviti kratek raziskovalni protokol, ki bi določal trajanje dejavnosti, navodila učencem, dovoljeno pomoč in časovne razmike med meritvami. Enotnejša izvedba bi zmanjšala vpliv organizacijskih razlik in olajšala primerjavo rezultatov.

Ocenjevalno rubriko za pet kriterijev bi bilo smiselno še natančneje opredeliti z jasnimi opisi za 0, 1 in 2 točki. Tako bi bilo vrednotenje preglednejše, učenci pa bi iz povratne informacije lažje razbrali, ali morajo izboljšati prepoznavanje, določanje mesta napake, razlago, popravek ali preverjanje.

Sistematično shranjeni anonimizirani odgovori bi omogočili tudi vsebinsko analizo tipičnih napačnih predstav. Skupni rezultat od 30 točk namreč ne pokaže vedno, kako je učenec razmišljal: dva učenca lahko dosežeta enako število točk, vendar imata težave pri različnih korakih analize.

S temi dopolnitvami bi bila presoja sprememb natančnejša, osnovna zamisel dejavnosti pa bi ostala enaka: učitelj ne spremlja samo pravilnosti končnega odgovora, ampak tudi kakovost učenčeve razlage in preverjanja.

Za učiteljsko prakso rezultati nakazujejo, da je dejavnost smiselno uporabljati tako, da učitelj ne razkrije popravka prehitro. Najprej lahko učenci samostojno označijo prvi korak, za katerega menijo, da ni več matematično veljaven. Nato zapišejo razlog, šele zatem pa pripravijo popravljeno rešitev in način preverjanja. V naslednjem koraku lahko primerjajo različne razlage v paru ali manjši skupini. Pri skupni razpravi učitelj ne išče samo pravilnega rezultata, temveč usmerja pozornost na kakovost utemeljitve: katero pravilo je bilo kršeno, zakaj popravek velja in kako lahko pravilnost preverimo. Takšen potek ohranja pet korakov dejavnosti vidnih in učencu omogoča, da opazi razliko med tem, da napako zgolj zazna, in tem, da jo zna pojasniti.

Primeri napak naj bodo izbrani premišljeno. Za učenje so uporabnejše napake, ki so povezane z razumljivim napačnim pravilom ali značilno napačno predstavo, kot pa naključne računske pomote brez jasnega vzorca. Pri ulomkih je tako lahko izhodišče seštevanje števcev in imenovalcev, pri enačbah napačno odstranjevanje oklepaja, pri odstotkihh zamenjava med odstotkom in številom, pri geometriji pa zamenjava med obsegom in ploščino. Učitelj lahko težavnost stopnjuje: najprej ponudi primer, pri katerem je napaka razmeroma očitna, nato pa primer, pri katerem je napačen korak zapisan v sicer prepričljivem postopku. S tem se dejavnost lahko prilagaja predznanju učencev in konkretni matematični vsebini.

Pomemben vidik praktične uporabe je tudi način povratne informacije. Namesto splošnega komentarja »narobe« lahko učitelj povratno informacijo naveže na pet kriterijev. Učencu lahko na primer pove, da je pravilno določil mesto napake, vendar mora še natančneje pojasniti vzrok, ali da je rešitev pravilno popravil, vendar preverjanje ni povezano z začetno nalogo. Takšna povratna informacija je bolj usmerjena v naslednji korak učenja. Hkrati omogoča učitelju, da pri celotnem razredu opazi, kateri korak povzroča največ težav. Če več učencev napako prepozna in popravi, ne zna pa je razložiti, je to drugačen didaktični signal, kot če težava nastane že pri prepoznavanju prvega napačnega koraka.

6 SKLEPNE UGOTOVITVE

Teoretični pregled in rezultati raziskave kažejo, da matematična napaka ni samo napačen končni odgovor. Uporabimo jo lahko kot izhodišče za pogovor o postopku, razlago in preverjanje. Dejavnost »Matematični detektivi« učenca pri tem vodi skozi pet korakov: napako prepozna, poišče njen vzrok, rešitev popravi, jo preveri in svoj postopek razloži.

Pri 32 sodelujočih učencih 8. in 9. razreda se je povprečni rezultat povečal s 17,5 na 23,9 točke od 30, kar pomeni razliko 6,4 točke. Pri končnem preverjanju so bili višji tudi deleži uspešnih rešitev pri vseh petih kriterijih. Povprečja treh trditev iz vprašalnika, za katere so bili ohranjeni zbirni podatki, so bila nad sredino petstopenjske lestvice. Zbrani podatki tako podpirajo H1, H2 in H3.

Rezultatov pa ne morem razlagati kot dokaz, da je spremembo povzročila samo dejavnost. Vzorec je bil majhen in priložnosten, kontrolne skupine ni bilo, natančni datumi posameznih izvedb niso bili sistematično zapisani, prav tako niso ohranjeni vsi izvirni ocenjevalni listi in vsi individualni odgovori na vprašalnik. Ker ni bilo zakasnjenega preverjanja, tudi ne morem presoditi, kako trajne so bile opažene spremembe.

Izvirni praktični prispevek naloge je petstopenjski didaktični okvir, ki omogoča sistematično delo z napačnimi matematičnimi rešitvami pri različnih vsebinah. Njegova uporabna vrednost je predvsem v tem, da učitelj ne spremlja le pravilnosti končnega odgovora, temveč ločeno opazuje prepoznavanje napake, določanje njenega mesta, razlago vzroka, popravljanje rešitve in preverjanje rezultata. Tako lahko lažje določi, na kateri stopnji učenec potrebuje dodatno razlago ali vajo.

Če bi raziskavo nadaljevala, bi vključila večji vzorec in primerjalno skupino, natančneje beležila potek izvedbe ter shranila anonimizirane izdelke učencev, ocenjevalne liste in individualne odgovore na vprašalnik. Dodala bi tudi zakasnjeno preverjanje, da bi lahko preverila trajnost sprememb in prenos naučenega na nove naloge.

Za praktično uporabo je pomembno, da učitelj izbere napake, povezane z obravnavanim matematičnim pravilom, učencem omogoči samostojno presojo in šele nato primerjanje razlag. Takšno delo usmerja pozornost od oznake »pravilno/napačno« k razumevanju postopka in utemeljevanju.

Najpomembnejše spoznanje naloge je, da pravilen popravek sam še ne pokaže vsega, kar učenec razume. Več izvemo takrat, ko zna učenec pojasniti, kje in zakaj je nastala napaka, utemeljiti popravek ter svojo rešitev tudi preveriti.

VIRI IN LITERATURA

1. Hoth, J., Larrain, M., in Kaiser, G. (2022). Identifying and dealing with student errors in the mathematics classroom: Cognitive and motivational requirements. Frontiers in Psychology, 13, 1057730. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2022.1057730

2. Khasawneh, A. A., Al-Barakat, A. A., in Almahmoud, S. A. (2022). The effect of error analysis-based learning on proportional reasoning ability of seventh-grade students. Frontiers in Education, 7, 899288. https://doi.org/10.3389/feduc.2022.899288

3. Larrain, M., in Kaiser, G. (2022). Interpretation of students' errors as part of the diagnostic competence of pre-service primary school teachers. Journal für Mathematik-Didaktik, 43, 39–66. https://doi.org/10.1007/s13138-022-00198-7

4. Maskos, K., Schulz, A., Oeksuez, S. S., in Rakoczy, K. (2025). Formative assessment in mathematics education: A systematic review. ZDM – Mathematics Education, 57, 679–693. https://doi.org/10.1007/s11858-025-01696-x

5. Metcalfe, J. (2017). Learning from errors. Annual Review of Psychology, 68, 465–489. https://doi.org/10.1146/annurev-psych-010416-044022

6. Xie, Y., Zeng, F., in Yang, Y. (2024). A meta-analysis of the relationship between metacognition and academic achievement in mathematics: From preschool to university. Acta Psychologica, 249, 104486. https://doi.org/10.1016/j.actpsy.2024.104486

PRILOGA 1: REZULTATI UČENCEV

V preglednici je predstavljenih 32 anonimiziranih parov rezultatov začetnega in končnega preverjanja, po 16 učencev iz 8. in 9. razreda. Podatki omogočajo izračun skupnih in razrednih povprečij ter opis sprememb med obema preverjanjema.

Oznaka	Razred	Začetno / 30	Končno / 30
U01	8	18	26
U02	8	13	17
U03	8	16	22
U04	8	15	21
U05	8	20	29
U06	8	20	24
U07	8	17	25
U08	8	21	29
U09	8	14	21
U10	8	21	25
U11	8	14	22
U12	8	17	22
U13	8	19	25
U14	8	14	22
U15	8	13	17
U16	8	17	22
U17	9	16	23
U18	9	19	27
U19	9	22	28
U20	9	21	25
U21	9	15	24
U22	9	15	20
U23	9	20	27
U24	9	22	29
U25	9	14	24
U26	9	17	23
U27	9	18	24
U28	9	17	22
U29	9	21	27
U30	9	20	25
U31	9	20	25
U32	9	14	22

8. razred: vsota točk 269 → 369; povprečje 16.8125 → 23.0625.

9. razred: vsota točk 291 → 395; povprečje 18.1875 → 24.6875.

Skupaj: vsota točk 560 → 764; povprečje 17.5000 → 23.8750.

Vir: lastni podatki. V vsakem razredu je po 16 učencev. Zaokrožena povprečja so po razredih 16,8 → 23,1 in 18,2 → 24,7, skupaj pa 17,5 → 23,9.

PRILOGA 2: PONAZORITEV IZVEDBE IN ODGOVORI UČENCEV

Spodnji opis poteka dejavnosti je didaktična ponazoritev in ni dobesedni zapis posamezne učne ure. Dodani so štirje izbrani anonimizirani odgovori učencev, ki ponazarjajo različne ravni analize napake. Oznake A–D ne razkrivajo identitete učencev.

Možni potek dejavnosti. Učitelj najprej predstavi rešitev z namerno napako in učencem razdeli list s petimi koraki: prepoznaj, razišči, popravi, preveri, razloži. Učenec samostojno označi prvi napačni korak ter v dveh povedih pojasni, zakaj je napačen. Nato zapiše pravilen postopek in rezultat preveri z vstavljanjem ali drugim ustreznim načinom. Učitelj ob koncu izbere nekaj različnih razlag in z učenci preveri, katera razlaga utemelji pravilo. Ta opis je didaktični primer; natančen potek posamezne izvedbe se je lahko prilagajal učni situaciji.

Primer naloge. Oceniti je treba rešitev enačbe 2(x + 3) = 14, v kateri je zapisano 2x + 3 = 14, nato 2x = 11 in x = 5,5. Prvi napačni korak je odstranjevanje oklepaja: pravilno je 2x + 6 = 14, zato je x = 4. Preverjanje: 2(4 + 3) = 14.

Odgovor učenca A – zgolj prepoznava. »Odgovor 5,5 ni pravilen.« Odgovor opazi napako, ne navede pa prvega napačnega koraka ali pravila.

Odgovor učenca B – določitev mesta. »Napaka je v prvem koraku pri odstranjevanju oklepaja.« Odgovor določi mesto napake, vzroka pa še ne pojasni.

Odgovor učenca C – razlaga in popravek. »Dvojko je treba pomnožiti z x in s 3. Zato dobimo 2x + 6 = 14, nato 2x = 8 in x = 4.« Odgovor navede pravilo in popravi rešitev.

Odgovor učenca D – popravek s preverjanjem. »Prvi korak je napačen, ker 2(x + 3) pomeni 2x + 6. Rešitev je x = 4. Preverim: 2(4 + 3) = 14, zato rezultat ustreza začetni enačbi.« Odgovor izvede vseh pet korakov.

Štirje zapisi prikazujejo različne ravni razlage, od prepoznave napake do utemeljenega popravka in preverjanja. Ker gre za izbrane primere, iz njih ni mogoče izračunati pogostosti posameznih ravni v celotnem vzorcu.

PRILOGA 3: NALOGE IN TOČKOVNIK

Priloga vsebuje tri naloge in točkovnik, uporabljene za vrednotenje petih kriterijev analize napake. Vsaka naloga je vredna 10 točk; skupaj je mogoče doseči 30 točk.

Naloga 1 – enačba (10 točk)

Presodi rešitev: $2(x + 3) = 14 \rightarrow 2x + 3 = 14 \rightarrow 2x = 11 \rightarrow x = 5{,}5$. Poišči prvi napačni korak, pojasni vzrok, popravi rešitev in rezultat preveri.

Rešitev za učitelja: Prvi napačni korak je $2(x + 3) \rightarrow 2x + 3$. Število 2 je treba pomnožiti z obema členoma: $2x + 6 = 14$, $2x = 8$, $x = 4$. Preverjanje: $2(4 + 3) = 14$.

Naloga 2 – seštevanje ulomkov (10 točk)

Presodi rešitev: $1/2 + 1/3 = (1 + 1)/(2 + 3) = 2/5$. Poišči prvi napačni korak, pojasni vzrok, popravi račun in rezultat preveri.

Rešitev za učitelja: Prvi napačni korak je seštevanje imenovalcev. Ulomka prevedemo na skupni imenovalec: $1/2 + 1/3 = 3/6 + 2/6 = 5/6$. Preverjanje: $5/6 - 1/2 = 2/6 = 1/3$.

Naloga 3 – odstotki (10 točk)

Presodi rešitev: 20 % od 150 = $20 \cdot 150 = 3000$. Poišči prvi napačni korak, pojasni vzrok, popravi račun in rezultat preveri.

Rešitev za učitelja: Prvi napačni korak je zapis 20 % kot 20 namesto 0,20. Pravilen račun je $0{,}20 \cdot 150 = 30$. Preverjanje: $30/150 = 0{,}20 = 20$ %.

Točkovnik: vsaka naloga je vredna 10 točk. Pri vsaki nalogi ocenimo pet kriterijev po 0, 1 ali 2 točki; skupaj $3 \times 10 = 30$ točk.

Kriterij	2 točki	1 točka (0 točk)
Prepoznavanje	Jasno presodi, da je rešitev napačna.	Presoja je nejasna (ne prepozna napake).
Mesto napake	Pravilno določi prvi napačni korak.	Označi napako, a ne prvega koraka (mesta ne določi).
Razlaga vzroka	Navede ustrezno matematično pravilo in ga poveže z napako.	Navede le splošno ali nepopolno razlago (vzrok je napačen ali manjka).
Popravek	Pravilen postopek in rezultat.	Postopek je večinoma pravilen, a ima manjšo računsko napako (popravka ni).
Preverjanje	Z neodvisnim preizkusom pravilno potrdi rezultat.	Nakaže ustrezen preizkus, a ga ne dokonča (preverjanja ni).

V oklepaju je pri posameznem kriteriju navedeno, kdaj se dodeli 0 točk. Ker posamezni izvirni ocenjevalni listi niso vključeni v nalogo, ponovna neodvisna presoja vseh dodeljenih točk ni mogoča.

PRILOGA 4: VPRAŠALNIK O DEJAVNOSTI »MATEMATIČNI DETEKTIVI«

Navodilo učencem: Pred teboj je kratek vprašalnik o dejavnosti »Matematični detektivi«. Vprašalnik je anonimen. Pri vsaki trditvi označi odgovor, ki najbolje opisuje tvoje mnenje. Ni pravilnih ali napačnih odgovorov.

Razred: ☐ 8. razred ☐ 9. razred

Pri trditvah od 1 do 8 uporabi lestvico: 1 – sploh se ne strinjam; 2 – se ne strinjam; 3 – niti se ne strinjam niti se strinjam; 4 – se strinjam; 5 – popolnoma se strinjam.

Št.	Trditev	1	2	3	4	5
1	Dejavnost »Matematični detektivi« je bila zame miselno zahtevna.	☐	☐	☐	☐	☐
2	Primerjanje svojih rešitev z rešitvami drugih mi je pomagalo pri razumevanju.	☐	☐	☐	☐	☐
3	Dejavnost »Matematični detektivi« mi je bila zanimiva.	☐	☐	☐	☐	☐
4	Pri dejavnosti sem pogosteje preverjal/-a, ali je rezultat pravilen.	☐	☐	☐	☐	☐
5	Iskanje vzroka napake mi je pomagalo bolje razumeti matematični postopek.	☐	☐	☐	☐	☐
6	Popravljanje napačnega postopka mi je pomagalo razumeti, kako nalogo rešiti pravilno.	☐	☐	☐	☐	☐
7	Napake pri matematiki zdaj bolj doživljam kot priložnost, da ugotovim, česa še ne razumem.	☐	☐	☐	☐	☐
8	Podobno dejavnost bi si želel/-a uporabljati tudi pri drugih matematičnih vsebinah.	☐	☐	☐	☐	☐

9. Kaj ti je bilo pri dejavnosti »Matematični detektivi« najbolj všeč oziroma najbolj koristno?

_____

_____

10. Kaj ti je bilo pri dejavnosti najtežje?

_____

_____

11. Ali ti je dejavnost pomagala drugače razmišljati o matematičnih napakah? Pojasni svoj odgovor.

_____

_____

12. Kaj bi pri dejavnosti »Matematični detektivi« spremenil/-a ali izboljšal/-a?

_____

_____